COLECCIÓN

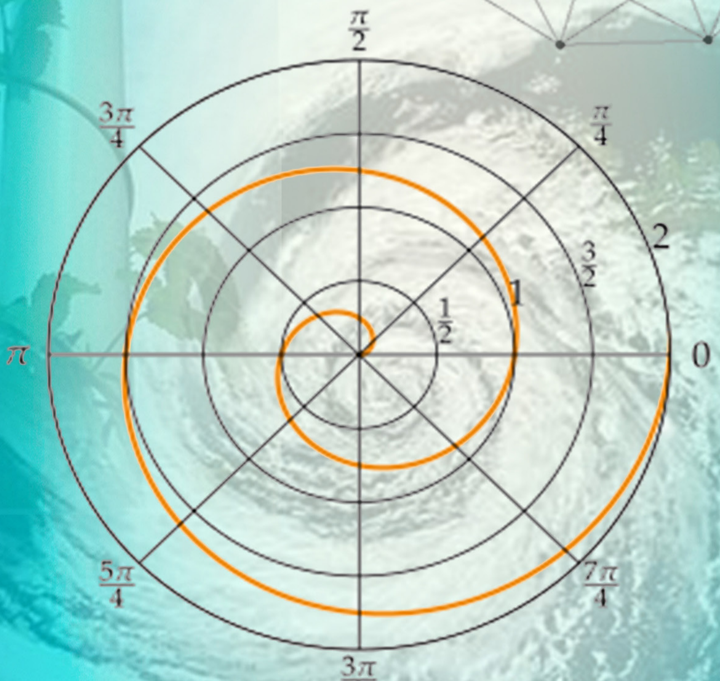
CIENCIA DE LA EDUCACIÓN

9

UMET
UNIVERSIDAD
METROPOLITANA

MATEMÁTICA
EN ESPIRAL

ALDO FALCONÍ ASANZA
FRANCO MANUEL HERNÁNDEZ CRESPO
RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ



MATEMÁTICA
EN ESPIRAL

ALDO FALCONÍ ASANZA
FRANCO MANUEL HERNÁNDEZ CRESPO
RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ

CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Con el auspicio de la Fundación Metropolitana

FUNDACIÓN METROPOLITANA
Fomentando la Educación Superior

MATEMÁTICA
EN ESPIRAL

ALDO FALCONÍ ASANZA
FRANCO MANUEL HERNÁNDEZ CRESPO
RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ

Diseño de carátula: D.I. Yunisley Bruno Díaz

Edición: D.I. Yunisley Bruno Díaz

Corrección: MSc. Dolores Pérez Dueñas

Dirección editorial: Dr. C. Jorge Luis León González

Sobre la presente edición:

ISBN: 978-959-257-575-2

EDITORIAL UNIVERSO SUR

Editorial: "Universo Sur".

Universidad de Cienfuegos. Carretera a Rodas, Km 3 ½.

Cuatro Caminos. Cienfuegos. Cuba.

CP: 59430

INTRODUCCIÓN

Un viejo profesor allegado a los autores de este libro nos contó que a finales de la década del ochenta del siglo pasado se celebró en un instituto preuniversitario de Cuba el concurso nacional de asignaturas de ese nivel, con especial énfasis en Matemática, Física y Español-Literatura, por ser asignaturas que preparaban el equipo nacional para participar en las correspondientes Olimpiadas Internacionales.

Era costumbre entre los miembros de los distintos tribunales de guardar un hermético silencio respecto a los ganadores y los resultados se entregaban en sobre sellado a la dirección del evento para abrirlos en el acto de premiación. El primer premio en ser entregado en esa ocasión correspondió a la asignatura Matemática y el ganador fue un alumno de la antigua provincia de Oriente; este resultado no extrañó a los que conocían el talento del alumno, su estudio y dedicación a la matemática era notorio, así como la ingeniosidad de sus demostraciones y como era de esperar, recibió el aplauso y el reconocimiento de todos.

Pasado este primer momento, hubo un silencio en el teatro y se anunció que se iba a dar a conocer el ganador del concurso de Física. El presidente del tribunal de Física tomó en sus manos el sobre que contenía el nombre de los ganadores y comenzó a explicar en síntesis los niveles de dificultad de los ejercicios que habían desarrollado los alumnos y la originalidad de las respuestas, en especial de las dadas por el alumno que había sido seleccionado como el ocupante del primer lugar y al leer su nombre las personas en el público se quedaron sorprendidas porque coincidía con el que había alcanzado el primer lugar en Matemática.

Esta vez los aplausos y comentarios se prolongaron por más tiempo, todos veían en él un futuro científico y explicaban tal coincidencia porque ambas ciencias se complementan y parece lógico que un alumno que tenga buenas actitudes para la matemática también las tenga para la física.

Nuevamente se repitieron las peticiones de continuar la actividad e invitar al silencio a los espectadores y transcurrieron los minutos de esperas para entregar el premio de Español-Literatura, pero esta vez se comenzó leyendo un fragmento de la obra premiada que resultó ser un ensayo sobre José Martí; realmente, nos comentaba el profesor que nos narró la anécdota, la lectura impactó a todos, por la profundidad en la investigación realizada y la belleza literaria del texto, pero en la medida que la lectura avanzaba en los asientos de un lado del teatro se comenzó a escuchar un murmullo que fue creciendo hasta contagiar a todos, porque el mismo alumno había ganado los tres premios.

La admiración e incluso la duda quedó en el aire hasta que llegó el momento del resumen del acto por parte del doctor Raúl Ferrer, quien en esos momentos era viceministro para la Educación de Adultos, pero que tenía además los méritos de ser un maestro excepcional, un poeta reconocido y un luchador social de larga trayectoria, su improvisado discurso comenzó por dar una definición de cultura, que en apretada síntesis generalizadora se ajustaba a lo que se acababa de presenciar y que solo un poeta de su talla podía hacer, expresando lo que en la memoria de nuestro amigo queda en forma indeleble:

> *"La cultura pueda expresarse como una fracción, que tiene por numerador al arte, la literatura y las ciencias sociales, y en su denominador se representan las ciencias exactas, naturales y técnicas, siendo la unidad el límite de esta expresión".*

Esta idea es la que prevalece en el propósito de este libro, hablar de la matemática como una manifestación de la cultura. No pretendemos atiborrarle la cabeza de fórmulas y conceptos que probablemente nunca llegue a entender. Lo que se ha querido lograr con estas cuartillas que le entregamos es que puedan nutrirse de la belleza que encierra esta maravillosa ciencia, que pueda animarse a pensar que la matemática no trata solamente de números y cálculo, sino que crea un mundo con una gran belleza imaginativa escondida detrás de cada figura, cada fórmula o hasta cada letra, porque como dijera Galileo, "la naturaleza es un libro abierto escrito en lenguaje matemático".

No es esta una idea original, si algo une a las tres generaciones de los autores de este libro y que van desde un estudiante de Ciencias Matemática a un doctor en Ciencias Pedagógicas, es el haber disfrutado con la lectura de un libro emblemático del tema escrito antes que todos naciéramos, se trata de "Matemáticas e Imaginación", escrito por Edwar Kasner y James Newman en 1944 y por eso se ha comenzado hablando de Googol, como una forma de recordar a estos pioneros en el esfuerzo de acercar la Matemática el gran público, al tiempo que se contextualizan las ideas expresadas en "MÁS ALLÁ

DEL GOOGOL", título del segundo capítulo del referido libro.

El siguiente capítulo del libro que presentamos se intitula "Entre el 0 y el 1" esa pareja maravillosa por la que el gran Leibniz sintió una especial fascinación y sin la cual no se puede vivir en el computarizado mundo contemporáneo y seguidamente en el tercer capítulo introducimos al lector en el maravilloso y hasta misterioso mundo de "los números primos" esos que hoy garantizan la codificación segura de su tarjeta de crédito.

El cuarto capítulo se dedica a "la telaraña matemática", esas figuras caprichosas que nos acompañan en el plano de la ciudad, el recorrido de los ómnibus o las constelaciones del zodiaco.

Los juegos no pueden faltar si se habla de una matemática que tiende a entretener y cultivar el espíritu, pero esta vez hay un capítulo que introduce en la teoría matemática de los juegos y su aplicación a la economía y todo proceso donde hay que tomar decisiones y otro capítulo que habla de juegos casi de niños como es la torre de Hanói, pero donde el desarrollo del intelecto está en la esencia de su concepción.

También se hablará del número PI y su rol en la ciencia, en la vida y en facetas tan curiosas como los acontecimientos ocurridos el día PI del calendario y tal vez usted pueda comprobar que usted nació u día PI o ese día coindice con, el de su matrimonio, su graduación o cualquier otro hecho significativo para usted.

El capítulo VIII y IX comienzan con preguntas intrigantes, la primera la formuló un apasionado jugador de dados a Galileo Galilei el padre de la física y dice así:

> *"Jugando con tres dados, he notado que el número 10, como suma de los puntos en los tres dados, aparece con más frecuencia que el número 9, ¿cómo es esto posible si ambos números se forma de seis maneras diferentes?"*

La segunda la planteó el matemático argentino Adrián Arnoldo Paenza en uno de sus programas de la serie televisiva "Alterados por PI" y dice sencillamente: *¿Tiene usted algún agujero en la media?*

A partir de la primera pregunta lo introducimos en el mundo de la teoría combinatoria y lo convertiremos en un aficionado a formular en cada instante de su vida una pregunta casi prodigiosa: ¿de cuántas formas…? La pregunta del doctor Paenza lo llevará al mágico mundo de la Topología y usted comprenderá entonces que vive en un mundo donde los cuerpos no son más que pedazos de plastilina que se transforman de uno en otro amoldándose a distintas formas.

Finalmente, el capítulo X lleva por título “Cuando la vuelta sigue a la vuelta”, está inspirado en una frase del poeta Vladimir Nabokov:

> *“La espiral es un círculo espiritualizado. En la forma espiral, el círculo, desenrollado, devanado, ha dejado de ser vicioso... La vuelta sigue a la vuelta, y toda síntesis es la tesis de la nueva serie”.*

Realmente así es también el desarrollo de la matemática donde “toda síntesis es la tesis de la nueva serie”. de ahí el nombre del libro.

Esperamos con las más sinceras ansias que después de repasar este libro se pueda acostar en su cama pensando en que aquella asignatura que cuando pequeños nos la explicaba una exigente maestra y que posteriormente nos hizo sufrir con ella un señor de espejuelos de pausado andar o una jovenzuela alocada que nadie comprendía lo que escribía en la pizarra por su pésima caligrafía no es tan fea y pesada como normalmente solemos pensar.

Los autores.

Capítulo I. El Googol

"Tendremos que padecer eternamente un número inventado por un bebé"

Isaac Asimov

1.1. El Googol, un número increíblemente grande

En este primer capítulo abarcaremos el tema acerca de un número que fue concebido en 1938 por Milton Sirotta, un niño que con apenas nueve años de edad fue capaz de plantear una idea tan interesante como la del **GOOGOL**. Este niño era sobrino del matemático **Edward Kasner**[i], el cual definió el concepto dado por su sobrino en el libro "Las Matemáticas y la imaginación" (En cuyo título nos basamos para nombrar el primer capítulo de este libro).

Para una introducción al tema, partamos del razonamiento que según cuenta la historia tuvieron unos niños que no sobrepasaban los seis años de edad. A veces puede ser subestimado el verdadero potencial intelectual que puede tener un niño del jardín de infantes, pero sin duda alguna todos son capaces de aprender con asombrosa exactitud las distracciones para los graduados en matemática.

Ese día se encontraba lloviendo de manera torrencial y al profesor se le ocurrió lanzar una pregunta bastante interesante: "¿Cuántas gotas de lluvia ustedes creen que puedan caer sobre la ciudad de Nueva York?". Analicemos usted y yo esta pregunta, cuando en el parte meteorológico se expresa que cayeron 5 milímetros de agua sobre la ciudad de Quito, ¿ha pensado usted a cuántas gotas de agua aproximadamente corresponde esa medida? Los niños de mi narración se quedaron asombrados ante tal incógnita, y usted, ¿tiene una respuesta? Intuitivamente todos contestaron "100", puesto que ninguno de ellos había sido capaz de contar por sí mismos más allá de una cifra más elevada, ¿cuál es su respuesta? Para un niño que ni siquiera alcanza los seis años, el número 100, e incluso el 3, ya comienzan a pensar que son cifras bastante elevadas y que sobre ellas no debería haber ninguna que las sobrepasase ¿cuál es su límite de “número grande”? Debido a esa forma de pensar el profesor tuvo que añadir una aclaración con el objetivo de hacerles comprender que 100 era apenas una cifra muy pequeña como para responder a su pregunta. El maestro volvió a preguntar: “¿Cuántas gotas creen ustedes que pueden caer sobre la azotea de su casa, en la ciudad de Nueva York y cuántas caen sobre todo el estado en 24 horas?”. Lo invito a que ahora usted también modifique respecto a la ciudad de Quito. Ante la nueva propuesta ninguno fue capaz de contestar, apenas tenían el conocimiento para representar un número de semejante magnitud, pero tenían en sus conciencias que sobrepasaba la cifra de 100; ¿cómo le va a usted con sus mediciones?

Playa de Manhattan.

Parque nacional Machalilla, Manabí

Más tarde se les pidió a los mismos niños que estimaran una cantidad de granos de arena en la playa de Manhattan; pero usted no tiene que pensar en la playa de Manhattan, la playa de los Frailes en parque nacional Machalilla muestra una naturaleza más hermosa, pero orgullo nacional aparte, lo importante es que usted de sitúe en el lugar de estos niños, piense cuán grande es ese número.

A esta nueva pregunta, los niños, que ya tenían un conocimiento previo para estimar determinadas cifras elevadas, respondieron que el número de granos de arena era el mismo que de gotas que pueden caer sobre la ciudad de Nueva York en 24 horas. Evidentemente no contestaron tratando de demostrar la igualdad entre dichas magnitudes, sino para expresar que el número pedido era muy elevado. Pero lo más sorprendente de todo es que pudieron analizar que en ambos casos buscaban cifras **finitas** y no **infinitas**.

¿Qué respuesta dio usted?, ¿llegó usted a plantear una equivalencia entre las gotas de agua sobre la ciudad y los granos de arena de la playa?, ¿qué piensa de esta respuesta de los niños?

El intelecto de varios sabios de la actualidad quedaría en ridículo ante el singular método imaginativo de estos niños que apenas asisten a la primaria. Para estos hombres de intelecto, el infinito no es más que su forma de **expresar un gran número**, poniendo como ejemplo un billón de billones, pero… ¿acaso ese número no es finito de por sí? Puede llegarnos a rayar en un principio, pero la expresión **un billón de billones**, aunque sea un número tan grande, sigue siendo finita. Es difícil, pero si nos disponemos a tomar un gran trozo de papel podemos escribir esa cifra sin dudarlo, o sea, por muy grande que sea no llega a tender a infinito. Por eso es sorprendente ese análisis hecho por los niños del jardín de infantes.

Al llegar hasta aquí quizás esto de contar granos de arena de una playa le parezca ridículo a algunos de nuestros lectores, pues sepa que Arquímedes[ii] de Siracusa[iii], uno de los científicos más importantes de la Grecia Antigua escribió un libro titulado “Arenario” o “Contador de arena”[iv] y en su primer párrafo plantea:

> *Algunos creen, rey Gelón[v] que el número de granos de arena es una cantidad infinita; hablo no solamente de la que está alrededor de Siracusa y de toda Sicilia, sino de toda la tierra tanto habitada como deshabitada. Hay algunos que no creen que sea infinito, sino que no hay ningún número nombrado que supere esta cantidad”. (Tomado de Sigma, El mundo de las Matemáticas, p. 4)*

Pero la concepción de números grandes también depende del desarrollo, así existe una tribu que habita en África del sudoeste, específicamente de Botsuana[vi] y Namibia[vii], conocida como los hotentotes[viii], que también tienen una forma muy peculiar de expresar el infinito. Para ellos, la expresión de nunca acabar comienza con el número 3. Si vas hacia uno de los habitantes de estas tribus y le preguntas “¿Cuántas vacas tienes?” y además poseen más de tres, entonces te responderán sin ningún problema “Muchas”. Sabiendo esto podemos afirmar que el número de gotas de lluvia que pueden caer sobre la ciudad de Nueva York, o incluso en cualquier ciudad del mundo, ya sea Quito o Santa Clara, van a ser “muchas”, pero no es ni por asomo cercano a infinito.

Aunque todos sabemos contar: unidad, decena, centena…etc., existen "números grandes" que tienen nombres propios ¿Querían escuchar sobre un número grande? Pues aquí lo tienen: **GOOGOL**. Muchos de los que conocen sobre el relato de este número podrían llegar a afirmar: "**El GOOGOL** es un número increíblemente grande. Es tanta su extensión que no seríamos capaces de imaginarlo o nombrarlo, ni siquiera seríamos capaces de escribirlo sobre un papel". Quizás sobre un papel no, pero en una pizarra sí que llegaríamos a escribirlo. El **GOOGOL** es el número dado a partir de que uno de esos niños del jardín de infantes se levantara de su asiento y comenzara a escribirlo sobre el pizarrón:

**10000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000.**

La definición exacta de **GOOGOL** es: "Un uno seguido de cien ceros". En la clase del niño se realizaron determinadas investigaciones por medio de los profesores y también de los alumnos, llegando a la conclusión de que el número de gotas que se precipitan sobre la ciudad de Nueva York, Quito o La Habana y cualquiera en el mundo sería increíblemente menor a un **GOOGOL**, jamás alcanzarían a llegar a ser cercano a **un uno con cien ceros**.

El GOOGOL también tiene diversas características que lo hacen único, por ejemplo: Es aproximadamente igual a la factorial de 70[1] y sus únicos factores primos son el 2 y el 5, repetidos cien veces cada uno. Este número (El **GOOGOL**), si lo escribimos en sistema binario ocuparía 333 bits (Observar lo referido en el capítulo **TEMA II: Entre el 0 y el 1**), nada relacionado con eventos sobrenaturales ni pactos satánicos, por favor, seamos coherentes. A pesar de que se trata de un problema bastante interesante y singular, el **GOOGOL** no tiene ningún uso práctico en la vida. El tío del muchacho simplemente lo usó en su libro para establecer una clara diferencia entre un número increíblemente grande y el infinito. Sin embargo, es verdad que la aplicación de este concepto en la enseñanza matemática es más que perfecto.

---

1 Factorial de 70 se expresa matemáticamente por:

$$70! = 70 \times 69 \times 68 \times 67 \times 66 \times \ldots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$$
$$= 11978571669969933009000000000000000000000000000000000000000000000$$
$$000000000000000000000000000000000000 \approx 10^{100}$$

Desde el día en que el niño nombró al **GOOGOL**, todos sabían que tenían delante de ellos a un número indudablemente grande y, mirándolo desde un punto de visión físico, es mucho mayor que la cantidad de átomos de hidrógeno que existe en el mundo. Gracias a la existencia del **GOOGOL**, además de la invención de las computadoras y el planteamiento de los algoritmos, se ha hecho un tema bastante común el querer realizar factorizaciones de números que se encuentren con alrededor de cien cifras.

Actualmente, las calculadoras científicas o de bolsillo pueden apenas representar completamente a un **GOOGOL**. Lo más cercano a lo que se ha llegado a efectuar ha sido **9,9999999 E+99 = 9,99999991099 = 0,99999999**. Los invito a todos a tomar una calculadora científica en sus manos e intentar reflejar un **GOOGOL**. Esto es mayormente debido a que algunos modelos solo representan entre 10 y 30 dígitos, pero gracias al avance de la tecnología y la digitalización, se han podido estimar resultados de más de 99 cifras.

El **GOOGOL** es tan grande y potente que llega a superar a la realidad en muchos sentidos. Tenemos conciencia de que la distancia entre estrellas, planetas, galaxias, etc… son increíblemente grandes. Muchas de estas distancias son medidas a partir de la conversión de **año luz**, que es 9,46 × 1012 km (9 460 730 472 580,8 km, para ser más precisos). Muy bien, ahora los invito a pensar en algo: ¿La distancia entre galaxias y estrellas es menor, mayor o igual que un **GOOGOL**? Intuitivamente la respuesta es menor, y tienen mucha razón. A continuación, mostraremos una tabla con varios datos acerca de dichas distancias y compárenlas ustedes mismos para que se den cuenta de que no forman apenas un cuarto de lo que es un **GOOGOL**.

1.2. Datos sobre los cuerpos celestes y el espacio

- Ningún cuerpo u objeto es capaz de alcanzar la velocidad de la luz, debido a que mientras más se acerca a dicha magnitud se vuelve más pesado.
- Un Parsec (unidad de longitud utilizada en astronomía) mide aproximadamente unos 34 058 631 000 000 km.
- La distancia entre el Sol y la estrella **Próxima Centauri** es de 39 924 284 000 000 km.

- Nuestra galaxia, la Vía Láctea, posee un diámetro aproximado de 150000 años luz, o sea 1 419 109 600 000 000 000 km.
- La distancia entre la Vía Láctea y la galaxia enana elíptica de **Sagitario** se encuentra entre 596 026 040 000 000 000 km y 728 476 270 000 000 000 km aproximadamente.
- La galaxia **Andrómeda (M31)** posee un diámetro aproximado de 140000, en otras palabras, 1 324 502 300 000 000 000 km.
- La distancia entre la Vía Láctea y la galaxia **Andrómeda** se sitúa aproximadamente entre 596 026 040 000 000 000 km y 728 476 270 000 000 000 km.
- Nuestra Vía Láctea se encuentra con respecto a **La Gran Nube de Magallanes** a una distancia de 1 542 099 100 000 000 000 km.
- La distancia entre la Vía Láctea y la galaxia **enana del Can Mayor** es de aproximadamente 236 518 270 000 000 000 km.
- La distancia entre la Vía Láctea y la galaxia **GR8**, siendo esta última la más lejana del **Grupo Local**[ix], es de 49 195 800 000 000 000 000 km aproximadamente.
- El **Grupo Local** posee un diámetro aproximado de 94 607 308 000 000 000 000 km.

Estos han sido solamente algunos datos acerca de las distancias entre las galaxias y algunas medidas referentes al cosmos. Lo que pretendemos es que aprecien con estas informaciones cómo un niño de 9 años fue capaz de inventarse un número gigantesco que supera sin duda las mayores distancias descubiertas hasta el momento. Es increíble, pero la imaginación de ese muchacho ha hecho que distinguidos científicos se mantuviesen a la sombra de lo que un pequeño puede llegar a realizar.

¿Y esto termina aquí? Para nada, todavía nos queda por indagar en un tema más. Si pensaban que el **GOOGOL** ya era grande de por sí, entonces es que apenas pueden hacer uso de su imaginación. Adentrémonos entonces en algo que va mucho más allá de ese número: **EL GOOGOLPLEX**.

A primera vista esto puede parecer más el título de un buscador de internet antes que cualquier otra cosa, sin embargo, se trata de una nueva invención del niño, al cual en el momento de inventar el **GOOGOL**, sugirió también ese nombre (**GOOGOLPLEX**) para asignárselo a un número con dimensiones colosales. El **GOOGOLPLEX** es mucho más grande que el **GOOGOL**, sin embrago continúa dentro del estándar de **número finito**. El **GOOGOLPLEX** surge a partir de que una persona escriba un número 1 y luego se fuesen agregando números cero como el individuo así lo quisiera. Este método conlleva a una falla significativa, tratándose de que no todas las personas tienen la misma paciencia, desembocando de esta manera en que en determinados momentos se obtendría un número y en otros se obtendría uno mucho más largo o más corto.

Si bien sabemos que un **GOOGOL** es un 1 seguido de cien ceros, podemos decir que un **GOOGOLPLEX** es un 1 con **GOOGOL** ceros posibles. De esta manera podemos llegar a la conclusión de que sería mucho más fácil viajar desde nuestra galaxia hasta la de Andrómeda varias veces, y no tener que caminar por toda tu casa una cantidad de kilómetros igual a un **GOOGOL** o **GOOGOLPLEX**.

Lo que se ha querido demostrar con este capítulo no es que necesitemos de un día para otro una regla del tamaño de un **GOOGOL** para realizar una medición, sino que los invito a pensar para que lleguen a notar por ustedes mismos que incluso la idea de un niño puede hacer estremecer las bases más sólidas de los matemáticos más reputados, llegando también a desafiar de esta manera a la mismísima intuición.

Finalmente, el comentario sobre que googolplex se parece a **GOOGLE** no fue casual, ¿sabía usted que el nombre Google, correspondiente a ese motor de búsqueda de Internet que probable usted utilice está realmente relacionado con el googol? pues sepa que el nombre original de este buscador era BackRub, pero en 1997 los fundadores deciden cambiar el nombre a Google inspirados en un error de ortografía al escribir googol y siguiendo esa idea, nombraron **Googleplex** a las oficinas centrales de la empresa, localizadas en 1600 Amphitheatre Parkway, Mountain View, Santa Clara County, California, cerca de San José, California.

Vista aérea de Googleplex.

Capítulo II. Entre el 0 y el 1

"Los números naturales los ha hecho el buen Dios, todo lo demás es obra de los hombres".

Leopold Kronecker

2.1. El código binario como sistema numérico

Quizás en algún momento de la vida a usted le haya pasado por la cabeza, o tal vez le preguntasen en alguna ocasión: "¿Cómo cree usted que están estructurados los programas y funcionamientos de una computadora?" La mayoría de las personas, probablemente las que posean un conocimiento general más amplio que los demás, sepan contestar: "Bueno… es eso de que está formado por 0 y 1". Es muy cierta está afirmación, pero ¿contesta con claridad lo que se está preguntando? ¿Verdaderamente esa persona está consciente de lo que signifique que los programas y funciones de una computadora estén estructurados a través del 0 y el 1? Esa respuesta dada tiene mucha lógica, pero carece de argumentos suficientes como para llegar a convencer.

A ese método de codificar con 0 y 1 se le asigna el nombre de: **código binario**. ¿Por qué "binario"? Pues precisamente porque está formado por dos únicos dígitos. El **código binario** es el sistema numérico que se emplea en la representación de texto o procesos de instrucciones, el cual se da a través del **sistema binario**.

Le voy a hacer una pregunta: ¿Sabe usted escribir números? La respuesta es evidente: "Sí sé escribir números". Tengo noción de que, si a usted le piden que reproduzca el número "cuatro mil quinientos veintiocho", tomará un lápiz y un papel, en el cual hará trazos hasta que quede: 4528. Pero ¿tiene noción de que esa escritura no es precisamente como la solemos ver? El número 4528 puede ser representado como:

$$4528 = 4000 + 500 + 20 + 8$$

$$4528 = 4x1000 + 5x100 + 2x10 + 8x1$$

$$4528 = 4x10^3 + 5x10^2 + 2x10^1 + 8x10^0$$

Si bien no tiene conocimientos precisos acerca de este tema, entonces puedo decirles que los “números normales” también se les llaman “números en base diez”.

El **sistema binario**, al cual también se le atribuye el nombre de **sistema diádico** en ciencias de la computación, ha tenido una historia bastante extensa en la cual ha sufrido un sinfín de cambios. La primera representación de este sistema fue dada por el antiguo matemático **Pingala**[x], el cual concibió lo que denominamos el primer sistema de numeración binaria. Este sistema data de aproximadamente desde el siglo tercero antes de nuestra era, coincidiendo con el descubrimiento y aplicación del número 0.

Aproximadamente en 1605, el matemático **Francis Bacon**[xi] tenía en mente el uso del sistema binario como método de transcripción para las letras del alfabeto, reduciéndolas de ese modo a la sucesión de los dígitos 0 y 1. Sin embargo, en 1854 el matemático británico **George Boole**[xii] publicó un artículo que trazaría una línea bastante notoria, desarrolló su propio sistema de lógica, el cual se le denomina como Álgebra de Boole[xiii]. Este sistema sería el utilizado más adelante para estructurar con más precisión el **sistema binario** actual.

Pero, la concepción de **sistema binario moderno** fue dada en su totalidad por el matemático **Gottfried Leibniz**[xiv], el cual publicó el artículo **“Explication de l’Arithmétique Binaire”**, donde se expresaban los símbolos binarios usados por matemáticos chinos, usando al 0 y al 1 como símbolos principales, como se hace en la actualidad. Algo curioso sobre este sujeto es que su idea surgió a partir de dos pensamientos suyos: El primero es que quería por todos los medios encontrar un método para reducir los errores cometidos en los cálculos. El segundo pensamiento que abordó a la hora de crear el sistema binario fue en su propia filosofía. Desde su punto de vista, Dios representaría al 1 y el 0 sería la “nada”. Partiendo de que él sabía que Dios creo **todo** a partir de **nada**, entonces se le ocurrió que su sistema debía estar atado a esa perfecta composición.

De esta forma ya tenemos un conocimiento básico acerca de cómo ha ido surgiendo la idea del uso de un sistema binario a partir de las investigaciones de determinadas personas. Sin embargo, todavía no sabemos cómo transcribir de un "número en base diez" a uno binario y viceversa.

Para este procedimiento vamos a comenzar con el número binario **101101** e intentaremos llevarlo a un "número en base diez" a partir de un análisis sencillo: Colocamos cada uno de los 0 y 1, en los cuales colocaremos (de derecha a izquierda) debajo de cada uno un 2^n y el siguiente siempre será **n** una unidad más. El primer valor que le asignaremos a **n** será el de 0, hasta llegar a 2^n según la cantidad de dígitos que forma el número en binario y le restamos 1, en este caso 6 – 1 = 5. Nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2^5} & \mathbf{2^4} & \mathbf{2^3} & \mathbf{2^2} & \mathbf{2^1} & \mathbf{2^0} \end{array}$$

Sin embargo, solamente efectuaremos aquellas potencias que se encuentren debajo de un 1, en este caso se tratan de 2^0, 2^2,2^3 y 2^5. Por último, las cifras dadas deberán ser sumadas. El procedimiento nos queda conformado de la siguiente forma:

$$\mathbf{2^0 = 1 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^5 = 32}$$

$$\mathbf{1+4+8+32 = 45}$$

Entonces, el número binario **101101** llevado al sistema de numeración convencional sería el 45. Ahora intentemos hacer el proceso contrario e intentemos llevar el 45 a sistema binario. Para ello debemos tomar el número e ir dividiendo sucesivamente por 2, tomando siempre el resto que será o 1 o 0.

45 / 2 = 22 Tenemos como resto 1

22 / 2 = 11 Tenemos como resto 0

11 / 2 = 5 Tenemos como resto 1

5 / 2 = 2 Tenemos como resto 1

2 / 2 = 1 Tenemos como resto 0

1 / 2 = 0 Tenemos como resto 1

Para ubicar correctamente los números, debemos ordenarlos de abajo hacia arriba, quedando **101101**. Sin embargo, este es un caso singular en el que ambas direcciones desembocan en el mismo resultado. Probemos con el número 29 y veamos lo que sucede.

29 / 2 = 11	**Tenemos como resto 1**
14 / 2 = 7	**Tenemos como resto 0**
7 / 2 = 3	**Tenemos como resto 1**
3 / 2 = 1	**Tenemos como resto 1**
1 / 2 = 0	**Tenemos como resto 1**

Ahora, tomando los dígitos de abajo hacia arriba y colocándolos de izquierda a derecha nos quedaría el número **11101**. Si todavía no nos ha quedado claro que ese sea el resultado, entonces podemos hacer el proceso inverso y comprobar que efectivamente ese número es igual a 29.

$$\mathbf{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1}$$

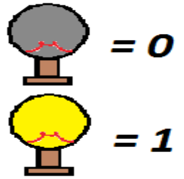
$$\mathbf{2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0}$$

$$\mathbf{2^4 = 16 \quad 2^3 = 8 \quad 2^2 = 4 \quad 2^0 = 1}$$

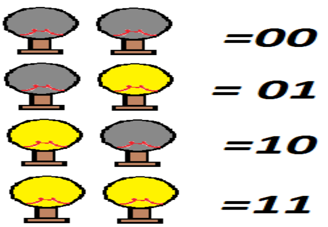
$$\mathbf{16 + 8 + 4 + 1 = 29}$$

De esta forma queda trazado un método sencillo y eficaz para convertir un “número en base diez” en uno binario y viceversa. Pero puede que a algunos no les haya quedado muy claro o tal vez no les ha gustado mucho la idea de tener que realizar tantos cálculos, en ese caso les propongo ver el siguiente ejemplo, cuyos protagonistas serán simplemente unos bombillos como los que podemos encontrar en casa.

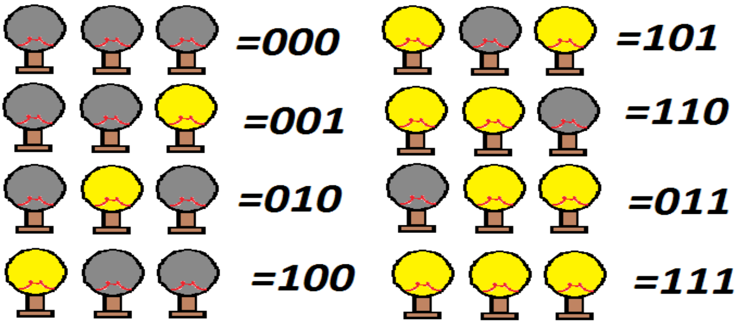
Como acabo de decir, en este ejemplo usaremos simples bombillos, a los cuales les asignaremos los valores de 0 y 1 dependiendo de si están encendidos o apagados: **ENCENDIDO** = 1 **APAGADO** = 0.



De esta manera vamos a ir analizando poco a poco todas las posibles combinaciones e iremos agregando sucesivamente una cantidad de bombillos superior. Cuando tenemos simplemente un bombillo solo tenemos dos posibles resultados para obtener: el 0 y el 1, cuando está apagado y encendido respectivamente. Sin embargo, las posibles combinaciones van en aumento si le agregamos un segundo bombillo.



Al agregarle un segundo bombillo podemos ver que las posibilidades de hacer combinaciones son el doble que la anterior. ¿Qué pasaría si agregamos un tercer bombillo? Veamos el siguiente gráfico:

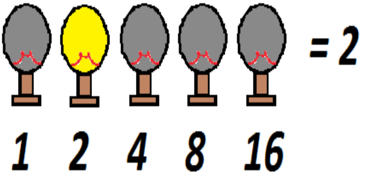


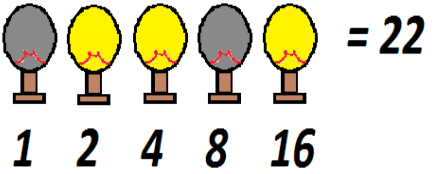
En este caso podemos ver que son increíblemente más grandes que si tuviésemos solamente dos bombillos. Evidentemente, cada vez que agregamos una lamparita sucede que se agregan el doble de posibilidades de formar números. ¿Cuáles van a ser esos números?

Dependiendo de la cantidad de bombillos que tengamos. Si poseemos 1 bombillo, solo podemos formar dos números, el 1 y el 0. Si tenemos dos bombillos podemos formar cuatro, el 0, 1, 2,3 y si tenemos tres formaremos ocho posibles números, el 0, 1, 2, 3, 4, 5,6 y el 7.

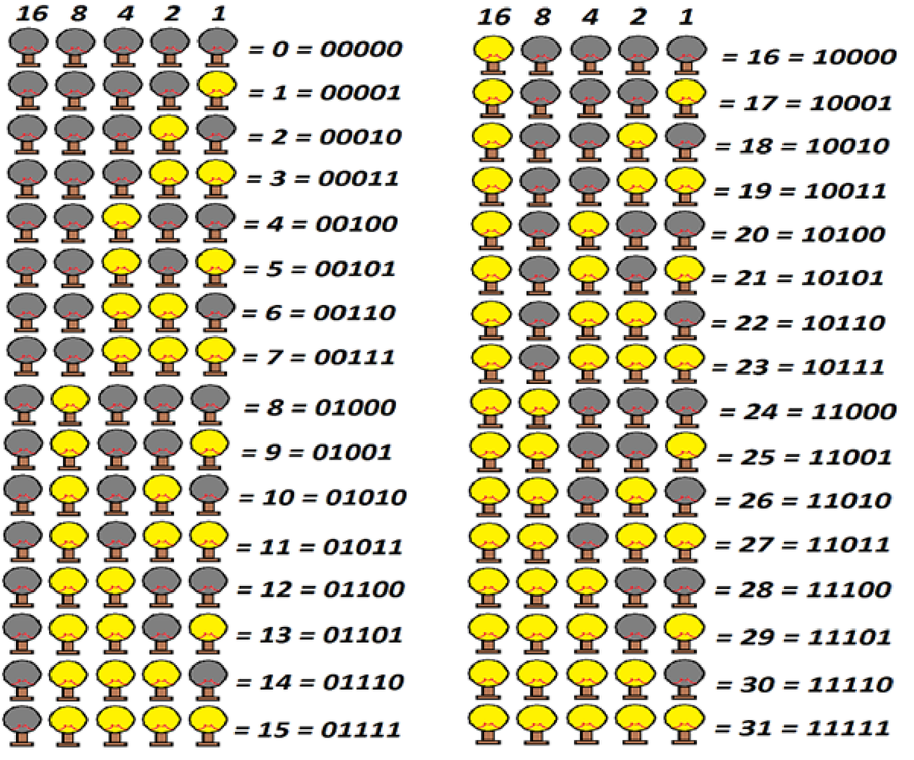
¿Cómo podemos averiguar qué números son los que estamos formando? Bueno, pueden simplemente encender o apagar bombillas hasta formar algún número en código binario y luego aplicar los mismos procedimientos que en los primeros ejemplos dados. Pero les prometí que en este caso sería diferente. En lugar de tomar simplemente tres bombillos haremos uso de cinco de ellos, así tendremos más posibilidades de formar números más grandes, en este caso se armarían 32 números (desde el 0 hasta el 31). Lo que vamos a hacer es colocar los cinco bombillos alineados. Al primero de la izquierda le asignaremos el número 1, al segundo el 2, al tercero el 4 y así sucesivamente hasta que cada bombillo tenga la asignación del doble que el anterior. Quedaría de esta manera.

A partir de este momento iremos encendiendo bombillos hasta que la suma de todos sea el número deseado. Si deseo obtener el número dos, entonces debo prender el bombillo con ese número, puesto que no tengo ningún otro con el 1 para efectuar 1 + 1 = 2. Sin embargo, si mi deseo es obtener el número 22, debo encender los bombillos con los números 16, 4, 2, así nos quedaría que 2 + 4 +16 = 22.





Lo curioso de este caso es que en la codificación para el sistema binario debemos ordenar los bombillos de manera decreciente. De esa forma podemos obtener los 32 posibles números usando solamente 0 y 1.



Evidentemente, lo óptimo para codificar con mayor exactitud es usar la menor cantidad de lamparitas posibles. Si necesitamos transferir el 6 a sistema binario, no es completamente necesario usar los cinco bombillos, sino solo tres de ellos. No está para nada mal usar una cantidad mayor, sino que es menos exacto y con mayores probabilidades de generar confusiones. Lo que quiero decir es, por ejemplo, tenemos al número 9. Para este no necesitamos cinco bombillos, sino cuatro, puesto que con tres solamente llega a ocho. Con los bombillos necesarios para generar este número tenemos que lo escribiríamos como **1001**, pero si realizamos la operación con cinco bombillos obtendríamos un **01001**. Según los pasos que les he dado al principio de este capítulo, llevarlos a “números en base diez” no supondrá ningún problema, ya que ambos terminan siendo 9. Hago esta aclaración para invitarlos a todos a pensar y que opten por una vía que les fuese mucho más favorable.

Probablemente alguno de ustedes podría decir: “Vaya… pero yo he visto que con el sistema binario también se pueden hacer conversiones de las letras del abecedario en números”. Pues tienen mucha razón, además de que es una de las cosas que hablaba al inicio del capítulo. El **sistema binario** es usado tanto en la introducción de otros números como de texto. ¿Existe un método propio para las letras? No, el método para asignarle un código a cada carácter del alfabeto es el mismo que hemos usado anteriormente, solo deben usar un poco sus cabezas y pensar de la siguiente forma: A todos, desde que vamos al jardín de infantes, nos enseñan cómo ordenar las letras. “Primero viene la **A**… luego la **B**… luego la **C**”. y así de manera sucesiva hasta que se hayan cubierto las 27 letras. En este caso vamos a hacer exactamente lo mismo. Elaboraremos una tabla para asignarle a cada letra un número según su orden, además de que agregaremos el carácter de **espacio** y le asignaremos la posición veintiocho. Queda de la siguiente forma:

A=1 B=2 C=3 D=4 E=5 F=6 G=7

H=8 I=9 J=10 K=11 L=12 M=13 N=14

Ñ=15 O=16 P=17 Q=18 R=19 S=20 T=21

U=22 V=23 W=24 X=25 Y=26 Z=27 - =28

De la misma forma en la que codificábamos los “números en base diez”, haremos lo mismo con las letras dependiendo de su lugar. Digamos por ejemplo que tenemos la siguiente frase: “Hola Harry Potter”. Buscaremos las dos tablas, la de las posiciones de las letras y la del **sistema binario**, de esta manera encontraremos fácilmente el resultado que buscamos. Como tenemos 28 números en total, lo más prudente es usar el caso de las cinco bombillas y no una cantidad inferior o superior.

H =01000 O = 10000 L=01100 A = 00001 - = 11100 H = 01000 A=00001 R = 10011 R = 10011 Y = 11010 - = 11100 P = 10001 O=10000 T = 10101 T = 10101 E = 00101 R = 10011

Lo único que nos resta por hacer es colocar todos esos códigos y colocarlos como una cadena lineal.

01000100000110000001111000100000001100111001111010111001000110000101011010100101100 11

De esta forma es que queda conformada la frase “Hola Harry Potter”, tomando el número de posición de cada letra y asignándole su respectivo código del sistema binario. Pero ¿esto tiene un significado? La verdad es que sí. Si llevamos todo esto a lenguaje informático podemos decir que la aparición de cada 0 y 1 equivale a que cada bombillo está encendido o apagado. El texto que acabamos de codificar tiene una longitud de 5 bits para cada carácter usado, que fueron 17, lo que hace un total de 85 bits.

17 CARACTERES X 5 BITS = 85 BITS

En un disco compacto, un CD normal, uno lleva consigo una cantidad aproximada de **5900 millones de bits**. Ahora quiero que analicen algo: Imagínense que pueda existir una habitación en este planeta la cual posea en su interior una cantidad de 5900 millones de bombillos, los cuales pueden estar encendidos o apagados. Lo más fascinante de todo es que con esta cantidad de espacio se nos permite hacer aproximadamente unos **1500 libros** con **250 páginas** cada uno. ¿Cuántas enciclopedias podrían caber en un CD?

La concepción de **Leibniz** sobre crear un sistema numérico perfecto también ha llevado a la necesidad de crear posibles operaciones de cálculo para el sistema binario. De esta manera miremos las siguientes gráficas de suma y multiplicación.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

X	0	1
0	0	0
1	0	1

Teniendo en cuenta la existencia de estas dos tablas, podemos quizás efectuar sumas y restas. Pongamos de ejemplo 9 + 13= 22. El número 9 en binario es 01001 y el 13 es 01101.

	01001	9
+	01101	13
	10110	22

El resultado de sumar los números 9 y 13 en binario resulta10110, el cual buscándolo en la tabla con los bombillos podemos ver que es precisamente el número 22. Esto nos trae como ventaja de que, si un niño es capaz de aprenderse el **código binario**, entonces con saberse apenas unas reglas básicas de suma y resta podría hacer cálculos avanzados a corta edad, también nos ahorramos la necesidad de aprendernos las tablas de multiplicar como se muestra a continuación:

	1011	11
x	101	5
	1011	
	0000	
	1011	
	110111	55

2.2. Aportes de Pingala al sistema binario

Hablemos ahora de un tema que mencionamos, pero que no llegamos a desarrollar completamente: **Pingala**. Antes se ha hecho mención acerca de este matemático, destacando la creación del primer método de **sistema binario** en el siglo III antes de Cristo. Probablemente muchos de ustedes se imaginaron durante una ínfima fracción de segundos, o incluso más, que el sistema inventado por este hombre era bastante parecido al que conocemos actualmente, pero no es así. Este hombre llegó a representar los números de 1 a 8 con la secuencia (usando símbolos modernos 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 e 1000).

Este matemático nació en la India, precisamente en el estado de **Kerala**[xv]. Se estima que su vivencia estuvo dada a partir del siglo VII antes de Cristo. Sin embargo, varias especulaciones y teorías afirmaban que era el hermano menor de **Pāṇini**[xvi], el gran gramático indio del siglo V a. C., por lo que hubo que situar a Pingala dos o tres siglos más tarde, aproximadamente en el IV o el III.

Pingala no era precisamente matemático, sino escritor, poeta, entre otras profesiones. Pero se le atribuye la ciencia de las matemáticas debido a sus fuertes sesiones de investigación. **Pingala**, a la hora de crear el sistema binario, buscaba en realidad una forma eficaz de medir los versos que formaban los Vedas, antiguos libros que reunían la sabiduría de la religión hinduista. **Pingala** tomó el bloque de tres sílabas, para los cuales existen ocho distintas combinaciones. Dichos bloques son:

--- = 1 U-- = 2 -U- = 3 UU- = 4 --U = 5 U-U = 6 -UU = 7
UUU = 8

A estos valores, al igual que hicimos con los bombillos, le asignaremos la cifra 1 para las **U** y la cifra 0 para los **-**, tomando de ejemplo al 6, (U-U) = 101.De esta forma volvemos a trazar un nuevo método de codificación en binario, con la única característica que nos faltaría el 9, único error que se comete en este sistema, sin embargo, carece de importancia, puesto que la finalidad de este estudio estaba dedicado a la medición de versos y no a la creación de un lenguaje.

Cuando se hace el traslado de los caracteres U y – para las cifras 0 y 1, entonces debemos comenzar por la parte izquierda de este, en donde el primer número será multiplicado por 1, el segundo por 2, el tercero por 4, el cuarto por 8 y así sucesivamente hasta que todos hayan pasado por el proceso de multiplicación. Luego debemos sumar todos los resultados dados y agregarle 1. Digamos por ejemplo que tenemos el verso: U-UU = 1011

1 x 1 = 1 0 x 2 = 0 1 x 4 = 4 1 x 8 = 8

1 + 4 + 8 = 13 13 + 1 = 14

En el sistema de **Pingala** el número 14 representa a esa única estructura métrica. Pero aquí no acaba la cosa, sino que también podemos convertir el número 14 en un verso. La operación a seguir es que vamos dividiendo cada resultado entre 2. Si nos da exacto, entonces anotamos un 1, si no da exacto anotamos un 0. En el caso de que nos topemos con un cálculo que nos dé resto, lo que haremos es sumarle esa cantidad al mismo número y volvemos a dividir.

14 / 2 = 7 Da exacto, anotamos un 1

7 / 2 = 3 Resta 1, no da exacto, anotamos un 0

Sumamos 3 + 1 = 4

4 / 2 = 2 Da exacto, anotamos un 1

2 / 2 = 1 Da exacto, anotamos un 1

1011

A partir del número 14 hemos vuelto a formar la codificación 1011 = U-UU, utilizando el método establecido por **Pingala**. Hemos podido observar que este poeta, escritor y matemático, a pesar de vivir en una época la cual probablemente fuera muy atrasada para analizar estos conceptos, fue capaz de crear un **sistema binario** parecido al que conocemos hoy en día. Este último método de conversión solamente sirve para números de dos dígitos o menos (desde el 1 hasta el 99). Para los de tres dígitos hay un procedimiento más complicado, el cual no se incluirá en este libro.

Mi objetivo con este capítulo y con los del resto del libro es invitarlos a todos a que pensemos que la matemática no es solamente ese mundo lleno de números y fórmulas, también podemos encontrar en ella distintos universos llenos de tesoros que llegan a satisfacernos a querer aprender más sobre esta hermosa ciencia.

Finalmente, quiero compartir con los lectores una anécdota de un profesor que nos daba entrenamiento sobre concursos de matemática. Cuando este profesor terminó de impartirnos el tema del sistema de numeración binaria, nos dijo que, en principio, la base de un sistema de numeración podía ser cualquier número natural y comenzó a mencionarnos que imagináramos un país llamado “MANCOLANDIA”

“¿Qué lugar es ese?” preguntamos.

“Es un lugar donde todos sus habitantes son mancos”, contestó con una sonrisita entre dientes, y agregó: “por tanto, no tienen los diez dedos de la mano y nunca tendrán la referencia de contar de 10 en 10 para que surja el sistema de numeración decimal; su sistema será de base cinco y escribirán los números así”, y comenzó a escribir con números grandes la siguiente tabla:

NÚMEROS INDOARÁBIGOS	NÚMEROS MANCÓNICOS
1	1
2	2
3	3
4	4
5	10
6	11
7	12
8	13
9	14
10	20
$25=5^2$	100
26	101
27	102
$125=5^3$	1000
225	1400
$625=5^4$	10000

Mientras construía la tabla el profesor explicaba la equivalencia entre los dos sistemas, así, lo mismo que el cuadrado de la base cuando se trata de la base 10 se escribe 100, el cuadrado de 5, es decir 25 se debe escribir del mismo modo, es decir 100.

La clase se transformó y cada uno comenzó a aportar términos para el nuevo sistema.

"Entonces, ya no se debe decir, unidad, decena, centena, ahora se dirá, unidad, quintena, vendicincocena", dijo alguien desde el fondo del aula.

Mientras, el profesor reía, había logrado su propósito, ya no estábamos atados al número 10, ya lo importante era comprender que, en los sistemas de numeración posicional, cada número tiene un valor absoluto y un valor posicional, así, en 1400, por ocupar el número cuatro la tercera posición, él representa $4\times5^2=100$ y un número como 1213 representa a $1\times5^3+2\times5^2+1\times5^1+3\times5^0=125+50+5+3=183$.

Cuando todo parecía calmado, el profesor, con un tono elevado nos dijo:

"Voy a comprobar si realmente ustedes saben sumar" y escribió la siguiente operación en la pizarra, aclarando que el pequeño 5 indicaba que trabajaba en base 5:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 4_5 \\ + & 4 & 2 & 3_5 \\ \hline \end{array}$$

"Comenzamos a sumar", dijo con voz más pausada.

"Atiendan bien, para que después no digan que no entendieron".

El profesor colocó la tiza debajo de la primera columna de números y lentamente dijo: "cuatro más tres es igual a".

"¡Siete!", respondimos a coro.

"¡Correcto!, entonces". , (la última palabra quedó suspendida en el aire), "escribo el 2 y llevo 1".

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 4_5 \\ + & 4 & 2 & 3_5 \\ \hline & & & 2 \end{array}$$

Las exclamaciones de todo tipo, algunas que no se pueden reproducir en este texto, inundaron el aula.

Cuando todo volvió a la normalidad el profesor expresó: “He comprobado que ustedes no pueden vivir en Mancolandia porque están aferrados al 10, cuando se suman los números 7 más 5 en base 10 cuyo resultado es 12, expresamos exactamente lo mismo, se escribe el 2, porque 12 excede en 2 unidades a la base del sistema que es 10 y llevamos una unidad del orden siguiente”.

Comprendida la explicación el profesor continuó: “tres más dos, son cinco y una que llevaba seis, escribo uno y llevo uno”.

Finalmente, fueron los alumnos los que concluyeron casi a coro el ejercicio: “dos, más cuatro, seis, más uno que llevaba siete, escribo 12”.

El resultado quedó en el pizarrón:

	2	3	4	5
+	4	2	3	5
1	2	1	2	5

Habíamos aprendido, casi jugando, a escribir números y a sumar en base 5.

Capítulo III. Números primos

"Hay dos hechos acerca de la distribución de números primos que quiero comentar y que espero convencerlos de tal manera que quede para siempre grabadas en sus corazones. La primera es que, a pesar de su simple definición y del papel que juegan como bloques de construcción de los números naturales, los números primos crecen como yuyos entre los números naturales, y parecen no obedecer otra ley que no sea la del azar, y nadie puede predecir en dónde aparecerá el próximo. El segundo hecho es aún más sorprendente, ya que afirma justamente lo contrario: los números primos exhiben una impresionante regularidad, hay leyes que rigen su comportamiento, y esas leyes son obedecidas por ellos casi con precisión militar".

Don Zagier

3.1. ¿Qué es un número primo?

En la historia de la matemática siempre se le ha dado una connotación diferente para cada uno de los aspectos que van apareciendo. Podríamos imaginarnos que las clasificaciones solamente llegan hasta un límite, pero en realidad no podríamos ni imaginarnos de cuántas maneras posibles podemos denominar diferentes objetos matemáticos.

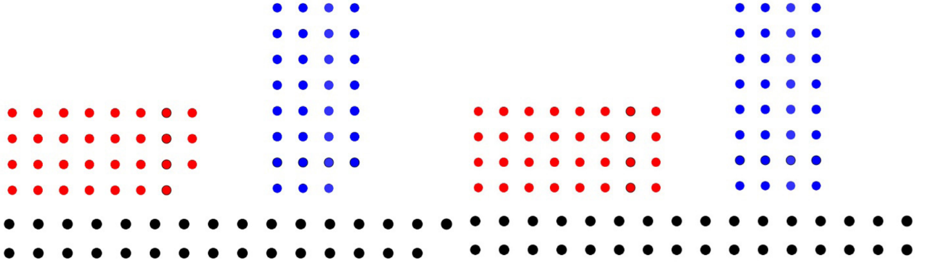
Un acercamiento a la clasificación de los números puede ser: naturales, enteros, de base diez, de base binaria, reales, irracionales, además de muchos otros ejemplos. Sin embargo, la clasificación que estaremos abordando en este capítulo será la referente a los **números primos**.

Si bien tenemos un conocimiento un poco más amplio sobre matemática, podemos afirmar sin ningún problema que un **número primo** es todo aquél que únicamente es divisible por él mismo y por la unidad. Lo que quiero decir es que solo son divisibles por ellos y por 1. Por el contrario, los **números compuestos** son todos aquellos que tienen más de un divisor posible.

Como dato curioso podemos añadir que el número 1, debido a un convenio, se le considera el único número que no posee las características ni de ser primo ni de ser compuesto. El 2 también tiene una participación curiosa en todo esto, ya que es el único **número primo** par, pues el resto de los pares tienen como mínimo tres divisores, al 1, al 2 y a ellos mismos, por lo que no se les consideraría **primos.**

Los **números primos** sirven para alimentar fuertemente una rama de la matemática llamada **teoría de números**, la cual basa sus estudios en las propiedades, por lo general aritméticas, de los números enteros; al respecto el gran matemático ruso IrJim MatiJéeuich Viogradov[xvii] expresa en la primera línea del libro "Fundamentos de la teoría de números" que "La teoría de los números se dedica al estudio de las propiedades de los números enteros".

Se les ha mencionado que, evidentemente, existe una diferencia muy clara cuando nos planteamos en comparar un **número primo** y un **número compuesto**, pero vamos a poner un ejemplo bastante sencillo para desarrollar dicho argumento: Supongamos que sobre la mesa de nuestra cocina tenemos puestas en escena un total de 32 bolitas. Estas bolitas pueden acomodarse en 4 filas de 8 ejemplares cada una, 8 filas de 4 ejemplares, 2 filas de 16 ejemplares.



Ahora imaginemos que de casualidad se nos llega a perder una de esas bolitas, quedándonos de esa manera solamente 31 bolitas. ¿Podemos seguir dándole un orden a las bolitas de tal manera que nos quede todo de manera simétrica y bien ordenada? ¿Es posible encontrar un número que nos permita armar filas exactamente iguales?

Si queremos armar flas de 2 bolitas, entonces nos sobra una de ellas, si las queremos de 4 filas nos sobran 3, si las queremos de 8 filas nos sobran 7. No importa la manera que busquemos para intentar acomodarlas, siempre nos dará como resultado que nos sobre alguna que otra bolita. La única manera de acomodar todas esas bolitas es de armar una única fila de 31 ejemplares o 31 filas de una sola bolita, lo cual es poco práctico.

Ahora, tenemos de antemano que el número, por ejemplo, el 48 lo podemos escribir como el resultado de la multiplicación de muchos **números primos**. Podemos verlo tal que 48 = 6 x 8. Pero ni el 6 ni el 8 son primos, así que deberíamos convertirlo a cada uno hasta lograr ese resultado buscado, quedando de tal manera que 6 = 2 x 3 y 8 = 2 x 2 x 2, por lo tanto: 48 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3. Esta es la única forma en la que podemos descomponer al 48 como producto de otros **números primos**, lo cual también se aplica para el resto de los números compuesto. Lo curioso de esto es que cuando llegamos al 2 x 2 x 2 x 2 x 3 no podemos seguir descomponiendo porque los **números primos** son indivisibles. Justamente por esos se les denomina **primos**.

Si fuésemos a representar de una manera creativa los números primos podríamos decir que: *"Son los bloques más pequeños de todos los que existen"* ¿A qué me refiero con esto? Lo que quiero decir es que un número, cualquiera que sea, puede ser **primo** o se escribe como la multiplicación de otros **primos**. Pero en definitiva son los **primos** los más chiquitos de todos, como si se tratase de los genes del cuerpo humano, o quizás como los átomos que componen la materia.

3.2. ¿Cómo hallar a los números primos?

Cada vez que nos planteamos el problema de encontrar un ente matemático rápidamente pensamos en una fórmula mediante la cual es posible generarlos, pero uno de los problemas no resueltos hasta el momento es encontrar una fórmula que permita obtener todos los números primos, aunque existen fórmulas que generan algunos números primos y de ello se hablará posteriormente, pero no existe hasta el momento una que los genere todos.

Pero a falta de fórmulas, un matemático de la Antigua Grecia nos dio un método infalible para llegar a cada uno de los números primos, la llamado **La Criba de Eratóstenes**[xviii]. Se trata simplemente de un algoritmo desarrollado por dicho matemático que nos permite encontrar todos los números primos menores que un número natural ***n***. Pongamos de ejemplo que nos urge saber de inmediato cuáles son los **números primos** del 1 hasta el 100. Los escribimos de tal manera que de forma horizontal los anotamos todos del 1 al 10, en la fila de abajo ubicamos desde el 11 hasta el 20, más abajo desde el 21 hasta el 30 y así sucesivamente hasta que tengamos 10 filas con 10 números cada una. Empezamos fijándonos en el 1 y tachándolo, puesto que por convenio a este no se le considera ni **primo** ni **compuesto**. El primer **número primo** que nos encontramos por el camino es el 2, a este no lo eliminaremos, pero entonces tacharemos a todos los múltiplos de 2. Luego nos encontramos al número 3, tachando de esta manera a todos sus múltiplos sin tacharlo a él. Luego vendría supuestamente el 4, pero lo hemos eliminado porque este era múltiplo de 2, entonces como consecuencia tenemos que el siguiente que se topa con nosotros es el 5, tachando así a todos sus múltiplos sin quitarlo a él. Si repetimos este proceso podemos hallar fácilmente que los números primos entre el 1 y el 100 son: 2,

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

Cabe preguntarse ahora ¿por qué criba? Si se consulta al diccionario se encuentran estas dos palabras:

Cribar. (Del lat. cribrāre). tr. Limpiar el trigo u otra semilla, por medio de la criba, del polvo, tierra, neguilla y demás impurezas. || 2. Pasar una semilla, un mineral u otra materia por la criba para separar las partes menudas de las gruesas. || 3. Seleccionar rigurosamente.

Criba. (De cribo). f. Cuero ordenadamente agujereado y fijo en un aro de madera, que sirve para cribar. También se fabrica de plancha metálica con agujeros, o con red de malla de alambre. || 2. Cada uno de los aparatos mecánicos que se emplean en agricultura para cribar semillas, o en minería para lavar y limpiar los minerales. || 3. Selección rigurosa. Someter a criba. Superar, pasar la criba.

Cuenta la historia que Eratóstenes construyó su tabla de números primos sobre una lámina de cobre, escribiendo los números y agujereando los números no primos, eso dio la idea de lo presentado era una criba, por ser una lámina de metal llena de huecos y el nombre pasó hasta nuestros días.

Si Eratóstenes hubiera tenido un asistente matemático como el Mathematica, con una instrucción como la siguiente: Table[Prime[*n*],{*n*,168}] hubiera obtenido sin dificultad los números primos menores que 1000.

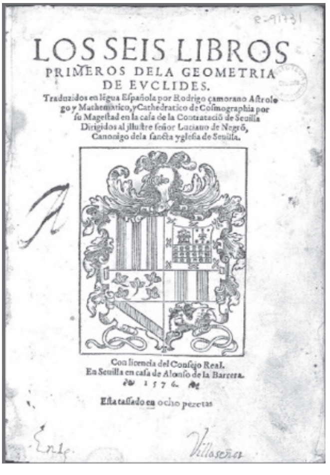
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

3.3. Los números primos en la historia

Todo tema que circula a través de la matemática tiene su propia participación, de alguna manera u otra, en la historia. Siempre que se habla sobre este tema nos podemos encontrar casos de personas con un conocimiento extraordinario que han puesto de manifiesto la grandeza de la matemática.

Sin embrago, el primer dato curioso sobre este tema no lo tenemos a partir de ningún matemático o pensador, sino de un hueso. El **Hueso de Ishango** (imagen adjunta) fue una reliquia encontrada por el arqueólogo Jean de Heinzelin de Braucourt. Esta singular pieza de arqueología data de aproximadamente unos 20000 años de antigüedad y tiene tallado cuatro **números primos**: 11, 13, 17 y 19. Esto quizás pueda ser interpretado por muchos como una prueba irrefutable del posible conocimiento de los **números primos** por parte de civilizaciones sumamente atrasadas. Sin embargo, no se tienen pruebas concisas que permitan afirmar la existencia de dichos conocimientos en épocas tan primitivas.

La primera prueba encontrada que aprueba el conocimiento de los números primos a partir de una civilización antigua está dada en La Antigua Grecia, a partir de los escritos **Los Elementos de Euclides**, documentos que datan desde 300 años antes de Cristo. En estos documentos (tomos VII a IX) **Euclides** logra aportar una definición de los **números primos**, demostrando que existen infinitos de ellos y formula el "teorema fundamental de la aritmética" que expresa que "Todo número natural se puede descomponer de forma única como producto de factores primos". También logra definir el **máximo común divisor** y el **mínimo común múltiplo**, proporcionando lo que más adelante sería conocido como **Algoritmo de Euclides**.


LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en lēgua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Mageſtad en la caſa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al illuſtre ſeñor Luciano de Negrõ, Canonigo dela ſancta yglesia de Seuilla.

Con licencia del Conſejo Real.
En Seuilla en caſa de Alonſo de la Barrera.
1576.
Eſta taſſado en ocho pecetas

Aunque los autores de este libro no tienen el propósito de cargarlo de demostraciones, salvo las que se presenten con suficiente evidencia al lector, se ha decidido esbozar la demostración dada por Euclides de que el conjunto de los números primos es infinito, atendiendo a la originalidad del método utilizado.

Euclides observó la relación que existe entre el producto de un conjunto de números primos sucesivos más 1, respecto a los números primos utilizados para generarlo, ejemplo:

1. $2\times3\times5+1=30+1=31$
2. $2\times3\times5\times7 \times 11 \times13 + 1 = 30\,030 + 1 = 30\,031=59\times509$

En el primer caso el resultado es 31, un primo **que no está en la lista de los que generaron este número**, en el segundo caso el número resultante es compuesto, 30031, que se descompone de manera única, según el teorema fundamental de la aritmética (también demostrado por Euclides) en **dos números primos 59 y 509 que tampoco están en la lista inicial**.

Esta sencilla observación en el núcleo de la demostración, en base a ella, el genial matemático griego supuso que si existiera un número finito de número primos: $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots p_n$, se obtendría el número $n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times \ldots \times p_n + 1$ .Si n se divide por cualquiera de los p_i el resto es 1, por tanto no es divisible por ninguno de los primos utilizados para generar a y en este caso puede suceder que:

1. n sea un nuevo primo distinto de los p_i
2. que por el teorema fundamental de la aritmética n se descomponga en forma única en números primos diferentes de cualquiera de los p_i

En cualquier variante, la lista tomada está incompleta, le faltaría n o los factores primos de n y, por lo tanto, el supuesto de que existe una cantidad finita de números primos es falso, por lo que se puede concluir que el conjunto de los números primos es infinito.

Indudablemente, el gran triunfo de la ciencia griega se debió a la acuciante observación del mundo que los rodeaba y desde la concepción pitagórica del mundo, los entes matemáticos formabas parte indisoluble de ese mundo.

Más allá de las matemáticas en Grecia se hicieron pocos adelantos en lo que respecta al ámbito de los **números primos**. No fue hasta el siglo XVII, exactamente en 1640, en que el matemático **Pierre de Fermat**[xix], estableció lo que sería conocido como el **Pequeño Teorema de Fermat:**

"Si p es un número primo y n es un número que no es múltiplo p, entonces n^{p-1} da resto 1 al dividirlo por p".

Para ilustrar este teorema vamos a valernos del siguiente programa con la aplicación Mathematica

$$\begin{aligned}&\text{Do[If[Mod}[i^4,5] == 0, \text{Print["Para i = "}, i, \text{""i}^4\text{"}\\&\quad = \text{"}, i^4, \text{"es múltiplo de 5, el teorema lo excluye"], Print["Para i = "}, i, \text{""i}^4\text{"}\\&\quad = \text{"}, i^4, \text{"Cociente"} \frac{\text{i}^4}{5}\text{" = ", Quotient}[i^4,5], \text{"Resto"}\frac{\text{i}^4}{5}\text{"}\\&\quad = \text{", Mod}[i^4,5]]], \{i,7\}]\end{aligned}$$

Se han tomado los 7 primeros números naturales elevados a la cuarta potencia para obtener su cociente y resto respecto al número primo 5 obteniéndose el siguiente resultado que verifican el teorema:

Para i= 1 i^4= 1 Cociente $i^4/5$= 0 Resto $i^4/5$= 1

Para i= 2 i^4= 16 Cociente $i^4/5$= 3 Resto $i^4/5$= 1

Para i= 3 i^4= 81 Cociente $i^4/5$= 16 Resto $i^4/5$= 1

Para i= 4 i^4= 256 Cociente $i^4/5$= 51 Resto $i^4/5$= 1

Para i= 5 i^4= 625 es múltiplo de 5, el teorema lo excluye

Para i= 6 i^4= 1296 Cociente $i^4/5$= 259 Resto $i^4/5$= 1

Para i= 7 i^4= 2401 Cociente $i^4/5$= 480 Resto $i^4/5$= 1

Esta propiedad no se cumple en general cuando p no es primo, para 4 por ejemplo se tienen los siguientes resultados donde puede observarse que los restos unas veces es 1 y otras en este caso es 3:

Para i= 1 i^3= 1 Cociente $i^3/4$= 0 Resto $i^3/4$= 1

Para i= 2 i^3= 8 es múltiplo de 4, el teorema lo excluye

Para i= 3 i^3= 27 Cociente $i^3/4$= 6 Resto $i^3/4$= 3

Para i= 4 i^3= 64 es múltiplo de 4, el teorema lo excluye

Para i= 5 i^3= 125 Cociente $i^3/4$= 31 Resto $i^3/4$= 1

Para i= 6 i^3= 216 es múltiplo de 4, el teorema lo excluye

Para i= 7 i^3= 343 Cociente $i^3/4$= 85 Resto $i^3/4$= 3

El Pequeño Teorema de Fermat tiene diversas consecuencias. Una de ellas es la aparición de una regularidad, o propiedad en común, que gozan todos los números primos. Otra, es un nuevo aporte para contestar parcialmente la pregunta relativa a ¿Cómo se hace para averiguar si un número dado es primo o compuesto?, así, el Pequeño Teorema de Fermat da un argumento para darnos cuenta de que algunos números no son primos. Por ejemplo, podríamos argumentar que el 4 no es primo pues 33 no da resto 1 al dividirlo por 4.

Fermat enunció el teorema en una carta fechada el 18 de octubre de 1640 y que dirigió a su amigo el matemático Frénicle de Bessy y como era su costumbre no dio una demostración, en esa carta el teorema tenía el siguiente enunciado:

p divide a $a^{p-1}-1$ cuando p sea primo y a sea coprimo[2] con p.

La primera demostración publicada del teorema se debe a Leonard Euler en 1736 en un artículo titulado Theorematum Quorundam ad Numeros Primos Spectantium Demonstratio. Posteriormente este matemático dio otras dos demostraciones, pero esta primera coincidía con la dada Gottfried Leibniz en un escrito redactado alrededor de 1683 y que nunca llegó a publicar; por su parte Gauss[xx] publicó otra demostración en su libro Disquisitiones arithmeticae en 1801.

Fermat también se preocupó por encontrar fórmulas que dieran números primos como resultado planteó que todo $2^{2^n}+1$ era un número primo. A esta propiedad solamente le pudo dar solución por su cuenta hasta n = 4, sin embargo Euler demostró que existen casos que incumplen esta propiedad como es $2^{32}+1$, el cual es un número compuesto. Hasta el día de hoy no se conoce que ningún número de Fermat es primo, con la excepción de los que ya él mismo conocía.

El siguiente programa con Mathematica confirma lo expresado:

$$\text{Do[Print["Para i = ",}\, i, \text{"",}\, 2^{2^i}+1, \text{If[Element[}2^{2^i}+1, \text{Primes], "Es Primo",}$$
$$\text{"Es Compuesto"]],}\{i, 10\}]$$

Resultando la ejecución:

Para i= 1 5 Es Primo

Para i= 2 17 Es Primo

Para i= 3 257 Es Primo

Para i= 4 65537 Es Primo

Para i= 5 4294967297 Es Compuesto

Para i= 6 18446744073709551617 Es Compuesto

Para i= 7 340282366920938463463374607431768211457 Es Compuesto

2 Se nombran números primos entre sí (o coprimos, o primos relativos) a dos números enteros a y b que no tienen ningún factor primo en común.

Para i= 8 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639937 Es Compuesto

Para i= 9 13407807929942597099574024998205846127479365820592393377723561443721764030073546976801874298166903427690031858186486050853753882811946569946433649006084097 Es Compuesto

Para i= 10 179769313486231590772930519078902473361797697894230657273430081157732675805500963132708477322407536021120113879871393357658789768814416622492847430639474124377767893424865485276302219601246094119453082952085005768838150682342462881473913110540827237163350510684586298239947245938479716304835356329624224137217 Es Compuesto

Otras fórmulas que generan números primos:

Euler descubrió que la fórmula n^2-n+41 daba primo para con Mathematica se tiene: **Print[Table[i^2 − i + 41, {i, 40}]]**

{41,43,47,53,61,71,83,97,113,131,151,173,197,223,251,281,313,347,383,421,461,503, 547,593,641,691,743,797,853,911,971,1033,1097,1163,1231,1301,1373,1447,1523,1601}

Lamentablemente para n = 41, la fórmula da 1.681 = 41 × 41.

El monje Marin Mersenne[xxi] introdujo en su Cogitata physico-mathematica en 1641 algunas conjeturas sobre los números enteros que sólo pudieron ser comprobadas o refutadas en el siglo XX una de ellas es que los números de la forma con p primo genera números primos. En realidad, esta afirmación no es cierta en general, pero a partir de esta fórmula se han obtenido los números primos más grandes, con ayuda del asistente Mathematica es posible determinar los primeros 12 exponentes (*p* primos) que generan números de Mersenne:

Table[MersennePrimeExponent[n], {n, 12}]

La lista de estos primeros 12 exponentes son: {2,3,5,7,13,17,19,31 ,61,89,107,127}; para obtener los números que generan se tiene la expresión en Mathematica: 2^%-1 , con la que se tiene el siguiente resultado:

3,

7,

31,

127,

8191,

131071,

524287,

2147483647,

2305843009213693951,

618970019642690137449562111,

162259276829213363391578010288127,

Se conocen 49 primos de Mersenne, el último se obtuvo en el 2016 y correspondió a $2^{74\,207\,281}-1$ y es un número de más de veintidós millones de dígitos, por eso no lo escribimos en el texto.

3.4. ¿Por qué al 1 no se le considera primo?

Hasta el siglo XIX, reputados matemáticos y expertos consideraban al 1 como número primo. Sin embargo, esta consideración tenía sus altos y sus bajos, lo cual llevó a hacer una convención que determinara la aprimalidad de este número. A pesar de que el 1 es considerado como **no primo**, muchos trabajos siguen teniendo su validez, como puede ser **La lista de Derrick Norman Lehmer**[xxii] de números primos hasta el 10.006.721, reimpresa hasta el año 1956 empezaba con el 1 como primer **número primo**.

También se puede decir que el 1 puede ser **primo** o **no primo** dependiendo del concepto en el que nos basemos.

Concepto 1: Todo número es **primo** si solo tiene como divisores a él mismo y a la unidad. En este caso el 1 es **primo**.

Concepto 2: Todo número es **primo** si tiene dos únicos factores diferentes que lo dividan. En este caso el 1 no es **primo** porque solamente se tiene a sí mismo.

Algunas propiedades de los números primos.

Sí. Como todos los números, los **primos** no dejan de ser un caso particular que posee propiedades bastante significativas. Esto puede verse mayormente plasmado en el **Teorema Fundamental de la Aritmética**, del que hemos hablado antes, el cual plantea que (cada número natural tiene una representación única como producto de factores primos). Esto hace que el 1 sea representado como un **producto vacío**.

La existencia de este teorema es una de las razones que nos permite excluir al 1 como número primo, ya que, si lo fuéramos a incluir, entonces tendríamos que recurrir a aclaraciones adicionales para el enunciado del problema.

De este importante teorema se derivan tres propiedades:

-El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de todos ellos. Para calcularlo, se descomponen los números en factores primos y se toman los factores comunes y no comunes con su máximo exponente. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 10 y 12 es:

$$10=2\times5 \text{ y } 12=2\times2\times3, \, el\ mcm\ (10,12)=2\times2\times3\times5=60$$

-El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de todos ellos. Es igual al producto de los factores comunes con su mínimo exponente. En el ejemplo anterior, el máximo común divisor de 10 y 12 es 2.

-Finalmente, como se dijo anteriormente a pie de página, dos o más números son coprimos, o primos entre sí, si no tienen ningún factor primo común; es decir, si su máximo común divisor es 1. Un número primo es, así, coprimo con cualquier número natural que no sea múltiplo de él mismo.

Sin embargo, no conforme con esas tres propiedades también se han hecho investigaciones que terminaron en la derivación de muchas otras. Tres de estas propiedades pueden ser:

- En su escritura en el sistema de numeración decimal, todos los números primos, salvo el 2 y el 5, tiene como el guarismo de las unidades uno de estos: 1, 3, 7 o 9. En general, en cualquier sistema de numeración, todos los números primos salvo un número finito acaban en una cifra que es coprima con la base.
- Teorema de Wilson: Un número natural n > 1 es primo si y solo si el factorial (n-1) es divisible por n. Asimismo, un número natural n > 4 es compuesto si y solo si (n-1) es divisible por n.
- Teorema de Cauchy: Si G es un grupo finito y p es un número primo que divide al orden de G, entonces G contiene un elemento de orden p.

3.5. Lo que no se sabe todavía sobre los números primos

- Una de las grandes preguntas que todavía no tienen respuesta es de qué manera están distribuidos los primos Más precisamente: ¿hay algún tipo de patrón que respeten los primos o realmente están distribuidos aleatoriamente?
- No se sabe si hay infinitas parejas de primos consecutivos (p, p + 2) como (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31).
- No se sabe si hay infinitos primos de Mersenne.
- No se sabe si todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos.

4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5.

- No se sabe si para todo $n \in N$ hay un número primo entre y n^2 y $(n+1)^2$.

¿Para qué nos sirven los números primos en la vida?

Evidentemente y como la mayoría de las ramas de la matemática, los números primos también tiene su aplicación en la vida diaria. En este caso los podemos utilizar para lo que llamamos **Firma Digital**, que es una técnica que nos da la posibilidad de efectuar distintas operaciones, ya sea en Internet, firmándolas como si uno mismo estuviese presente, como si de verdad tuviésemos un lápiz y un papel delante de nosotros.

La técnica consiste en que cada individuo posee dos claves distintas, una que se publica (Clave Pública) y otra que no se pública (Clave

Secreta). Sin embargo, ambas claves tienen un número *n* en común, el cual es el producto de diversos números primos, los cuales son bastante sencillos de multiplicar para llegar hasta *n*. Pero debido a su propiedad, dado ese número *n*, sería imposible volver para atrás (o desencriptar) y volver a tener los números primos que lo componen. De ahí viene la complejidad y lo útiles que son los números primos, radicando de esta manera la seguridad del sistema.

Si uno piensa en el número 10 y quiere descomponerlo en factores primos, entonces automáticamente piensa en 2 x 5. Es un caso bastante simple. Pero si uno tiene una clave con 300 dígitos sería imposible, ni siquiera teniendo en nuestro poder la computadora más potente del mundo, averiguar cuáles serían esos números primos que lo componen.

Lo interesante acerca de este tema es que hace aproximadamente unos 2300 años atrás se habían generado números que en ese tiempo eran considerados **ciencia pura**, o sea, no se les encontraba ningún tipo de aplicación coherente. Eran capaces de ver que esa rama de la matemática llamada **Teoría de Números** se inventaban cosas tan abstractas que eran incapaces de encontrarle algún tipo de aplicación. Sin embargo, hoy en día somos capaces de usar esos resultados, exactamente como estaban, y usarlos para el beneficio del mercado económico mundial, que es algo que mueve diariamente miles de millones de dólares.

Esto nos llega a demostrar que debemos apoyar a la matemática, y no solo a ella sino a las demás ciencias, en todo su esplendor porque uno nunca sabe verdaderamente cuándo algo de sus contenidos se puede volver aplicable.

A primera vista nos parecía que los números primos no podían tener relación alguna con aquello que nos rodea diariamente, sin embargo, la manera de confiar en que, si vamos a un cajero automático, o por internet, y que este nos despache con efectividad depende plenamente de los números primos.

Capítulo IV. Telaraña matemática

"La exactitud rigurosa de la que es capaz el pensamiento matemático ha seducido a algunos a un estilo que encierra al lector en una celda intensamente iluminada, donde toda pequeñez resalta sin relieve con cegadora claridad. Yo amo el campo abierto bajo un cielo sereno, con hondas perspectivas, donde, junto a la profusión, los agudos detalles se desvanecen en el horizonte".

Hermann Weyl

4.1. La Teoría de Grafos

Probablemente usted pueda estar imaginando miles de significados para este tema y aun así no daría en el clavo ni llegaría a acercarse a un término que se le pareciera. Puesto que la **Teoría de Grafos** es un tema tan amplio y abarcador, solamente vamos a centrarnos principalmente en aquellos aspectos más importantes y que nos resulten de mayor valor para introducirnos en el interesante mundo de las matemáticas.

La **Teoría de Grafos** o **Teoría de las Gráficas** es, como ya he dicho antes, un extenso campo de estudios en la matemática, sin embargo, también tiene una marcada importancia en el uso de las ciencias informáticas. Esta rama se dispone a estudiar las propiedades de los **grafos**, cuyas estructuras estarán formadas por dos elementos esenciales: El conjunto de vértices, los cuales pueden ser los nodos o los puntos, y el conjunto de las aristas o lados, las cuales pueden tener una orientación o no. Otra forma de denominar a la **Teoría de Grafos** sería con **Análisis de Redes**.

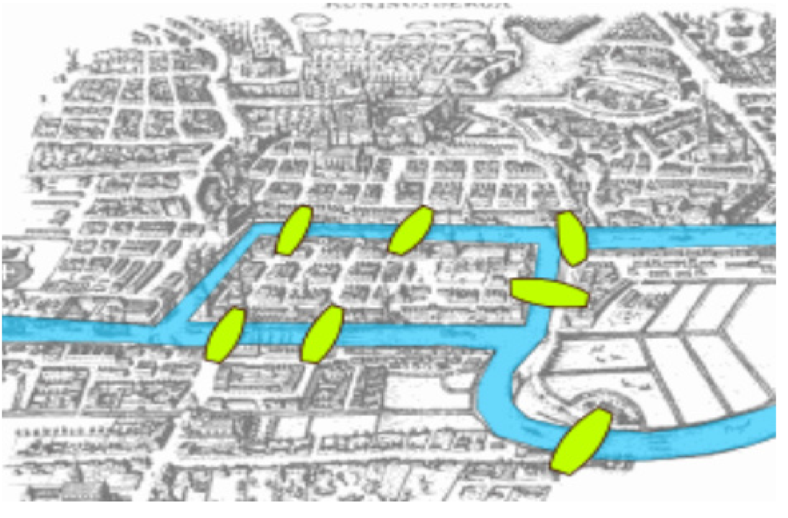
4.2. ¿Cómo surgió la teoría de grafos?

La versión más acertada sobre el surgimiento de esta singular rama de la matemática se remonta en el siglo XVIII a partir del planteamiento de uno de los problemas más trascendentales de la historia: **Los puentes de Königsberg**. Este problema trajo consigo una gran conmoción para su época, debido a su aparente sencillez, pero en cuyo interior esconde intrincados métodos y análisis que dieron como resultado el surgimiento de **La Teoría de Grafos**.

Los puentes de Königsberg

Puente de la Miel

El nombre se este problema se le debe a la ciudad de **Königsberg**, la cual pertenecía en aquellos tiempos al imperio alemán, pero que a partir de 1945 terminaría siendo territorio de Rusia, llamándose **Kaliningrado**. Esta ciudad se ve atravesada por el río Pregel, el cual tiene como característica el poder dividir el terreno en cuatro secciones distintas que estaban unidas a través de siete puentes. Los nombres de dichos puentes eran: **Puente del herrero**, **Puente conector**, **Puente verde**, **Puente del mercado**, **Puente de madera**, **Puente alto** y **Puente de la miel**.



Este problema tenía como primera condición el de trazar un recorrido de tal manera que un sujeto caminase a través de los siete puentes, sin embargo, en su trayecto no podía hacer contacto con cada uno más de una vez, debía recorrerlos todos sin permitirse el error de volver a pasar por uno el cual ya había atravesado. También se establecía como segunda condición el regreso obligatorio hacia el punto inicial de partida.

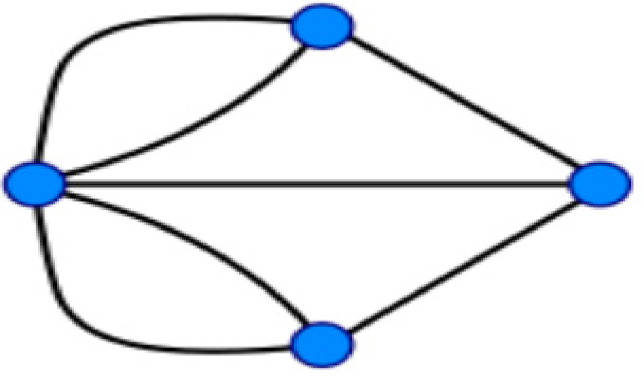
La solución del problema

Sin duda alguna, uno de los matemáticos más grandes de toda la historia (Y creador de la que sería la fórmula matemática más hermosa de todas) fue **Leonhard Euler**[xxiii], quien se estableció en este lugar a los 34 años de edad para desarrollar una fructífera carrera investigativa. La ciudad de Königsberg tuvo determinado reconocimiento como epicentro científico gracias a la contemporaneidad de Euler con afamados matemáticos y pensadores procedentes de esta ciudad. El problema de los siete puentes empezó a desenlazarse como un tema trivial hasta que poco a poco fue captada la atención de muchos estudiosos de la matemática. Esto fue debido, como dije antes, a su aparente sencillez.

Para responder a este problema debía uno plantearse una pregunta muy importante: "Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?"

La respuesta para dicha interrogante es que sencillamente no existe un recorrido posible que te permita atravesar los siete puentes, recorriendo una única vez cada uno y que además te permita regresar al punto de partida. La vía más generalizada que optaron para darle solución a este problema fue el anti-análisis uso de la fuerza bruta, probando con este método todos los distintos recorridos empezando con un puente distinto e intentando ir por cada una de sus direcciones.

Como ya sería evidente imaginarnos, Euler nunca optó por darle un simple "no es posible porque he probado todos los casos y ninguno de ellos me resulta", él siempre quiso ir un paso por delante al intelecto general y dar una respuesta más aceptada. Para la demostración de este problema, Euler recurre a enfocarse en las regiones terrestres y en las uniones que existen en esta. A cada puente lo representó como una línea que unía dos puntos, los cuales formaban una región diferente (en total fueron cuatro estas regiones). Así redujo de esta forma a tomar la decisión de si existía o no un camino que comenzara por uno de los puentes, pase una sola vez por cada línea y regrese al punto de partida.



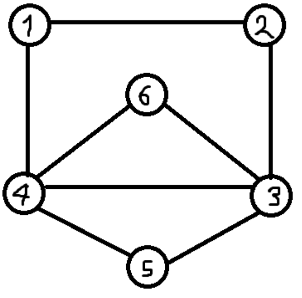
La solución de Euler fue sencillamente ingeniosa, puesto que es muy cierto que si llegamos a un punto desde una línea, como único podríamos salir de dicho punto es a través de otra línea diferente. Eso significaría que los puntos de partida y de del final deberían estar unidos a través de un conjunto de líneas impares. Pero el mismo problema exigía como requisito el de que el punto inicial debía ser el mismo que el final, pues no puede existir ningún punto conectado a través de un número impar de líneas. Entonces se define que es imposible trazar el recorrido deseado del problema de **Los Puentes de Königsberg**.

Los resultados de resolver el problema

Fue la abstracta mente de Euler, con la cual le dio solución a este problema, la que le dio paso a la creación de los primeros conceptos de grafos. Específicamente, la representación del mapa de **Los Puentes de Königsberg** es reconocida como un multigrafo no dirigido y sin la posesión de ningún tipo de bucles (rizos).

La **Teoría de Grafos** generó a partir de esta solución el concepto **de Ciclo Euleriano**, en honor (evidentemente) a Leonhard Euler. Este ciclo tiene la particularidad de representar cualquier recorrido capaz de atravesar todas las aristas de una sola vez, regresando finalmente al punto inicial.

Un problema muy gracioso pero interesante acerca del **Ciclo Euleriano** es el de dibujar un sobre abierto. No se permite levantar el lápiz sobre el papel, ni pasar dos veces por el mismo sitio. ¿Es posible? Aparentemente uno diría, si se basa en la solución del problema de los siete puentes, que tampoco es posible, pero les muestro una imagen que demuestra lo contrario.



Lo gracioso de este problema es que, si bien hacerlo con seis puntos es muy fácil, intentar dibujar el sobre cerrado, prescindiendo del punto cinco y de sus vértices adyacentes, sería imposible.

Otro ejemplo de **Ciclo Euleriano,** con respecto a la imagen anterior, puede ser el de **C = (1, 2, 3, 4, 6, 3, 5, 4,1)**. Este ciclo al que se le atribuye en honor a Euler tiene dos partes muy importantes: **Los Casos** y **El Teorema**.

Para **Los Casos** tenemos que, dado un grafo conexo[3] y no dirigido **G = (V, E)**, además, si **G** tiene dos vértices de grado[4] impar, entonces **G** tiene un camino Euleriano no cerrado. **G** solo tendrá un ciclo cerrado si sus vértices tienen un grado par.

3 En teoría de grafos, un grafo G se dice conexo si, para cualquier par de vértices u y v en G, existe al menos una trayectoria (una sucesión de vértices adyacentes que no repita vértices) de u a v.

4 En Teoría de grafos, el grado o valencia de un vértice es el número de aristas incidentes al vértice.

Para **El Teorema**, dado que **G (V, E)** no orientado y conexo, si tiene **2k** nodos de grado impar, entonces **G** puede ser escrito como unión de **k** caminos distintos sobre los arcos y valen las siguientes expresiones:

1- **G** es Euleriano

2- con grado () y par

3- todos disjuntos en los arcos, es decir con , va de un nodo de grado impar a un nodo de grado impar.

Un grafo admite un camino Euleriano cuando tiene exactamente dos nodos de grado impar.

Un **Ciclo Euleriano** no solo termina en su teorema, sino que también posee un conjunto de características:

-Un grafo conexo y no dirigido se dice que es Euleriano si cada vértice tiene un grado par.

-Un grafo no dirigido es Euleriano si es conexo y si se puede descomponer en uno con los vértices disjuntos.

-Si un grafo no dirigido G es Euleriano entonces su grafo-línea L (G) se dice que es también Euleriano.

- Un grafo dirigido es Euleriano si es conexo y cada vértice tiene grados internos iguales a los externos.

- Un grafo no dirigido se dice que es susceptible de ser recorrido si es conexo y dos vértices en el grafo tienen grado impar.

4.3. El teorema de los 4 colores

Otro caso bastante curioso que demuestra a la **Teoría de Grafos** como una rama bastante amplia es el singular **Teorema de los 4 colores**. En un lenguaje científico este teorema quedaría expresado de la siguiente forma:

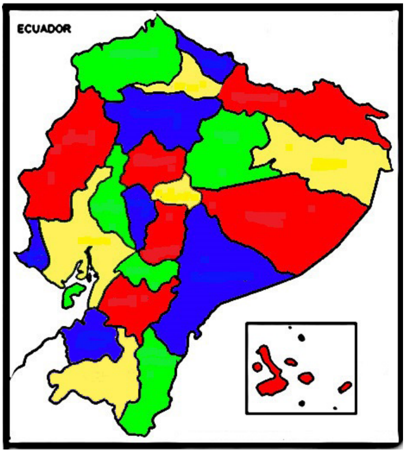
“Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color”.

Sin embargo, vamos a darle una interpretación quizás más admisible para todos:

"Solamente bastan cuatro colores distintos para colorear los países del mundo sin que sus fronteras se confundan".

Aparentemente parece no ser posible realizar esta tarea, sin embargo, tiene su explicación.

La demostración de este teorema fue dada a partir de la ayuda de una computadora, pero varios matemáticos desaprueban esta solución ya que sería casi imposible ejecutar la práctica que se necesita para demostrarlo, debido a que una persona no se vería físicamente capacitado para hacerlo manualmente. Lo único a lo que queda rezarle es a la exactitud que tuvo esa computadora para realizar los cálculos.



Este resumen de la solución es extraído del libro **Every Planar Map is Four Colorable** de Appel y Haken, hecho público en 1989.

El matemático **Alfred Bray Kempe** lanzó en 1879 una posible demostración para las conjeturas realizadas a partir de este teorema. Esta posible solución fue anunciada en la revista **Nature**. Los argumentos de **Kempe** son los siguientes: *En primer lugar, si el grafo tiene regiones o caras planas no triangulares, es decir, no tienen tres aristas como fronteras, se pueden agregar aristas al grafo (sin introducir nuevos vértices) de manera que cada región del grafo sea triangular, incluida la región exterior. Si este grafo triangular obtenido del original admite una coloración con cuatro colores o menos, entonces el grafo inicial también admite la misma coloración (o una coloración con menos colores), ya que la coloración sigue siendo válida si se eliminan las aristas introducidas. Así que basta demostrar el teorema de los cuatro colores para el caso particular de los grafos triangulares para probarlo a todos los grafos planos, y sin pérdida de generalidad, suponemos que el grafo es triangular.*

Esta ha sido solamente una extracción, sin embargo, ustedes mismos en sus casas, con unos colores y paciencia, pueden demostrarlo.

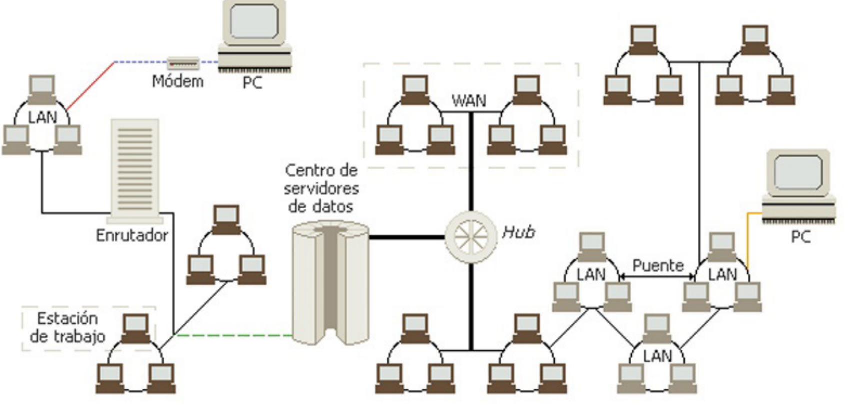
4.4. Algo más sobre la teoría de grafos

La aplicación de la **Teoría de Grafos** es increíblemente extensa para la vida. Existe un sinfín de utilidades que podemos asignarle a dicha teoría y aun así nos quedaríamos cortos. Quizás no les parecerá tan importante, pero se nos permite a través de los grafos poder enlazar a una persona con todo el resto de habitantes del planeta. ¿En serio? Sí, es muy cierta esta afirmación. Pongamos de ejemplo que queramos elegir una persona al azar en Asia, evidentemente vamos a elegir una que no hubiésemos tenido ni siquiera idea de que existía, embajadores, diplomáticos, cantantes, artistas, empresarios, etc. nada de eso vale para realizar esta demostración.

Digamos que conseguimos una guía de Asia y damos con una habitante sin ninguna acción haya hecho que lo destaque por encima de los demás. ¿Cómo podemos hacer para acceder a esta persona? Esto puede comenzar a dársele una solución a partir de trazar una **red de conocidos**. Digamos que yo conozco al primer ministro de Japón, este conoce al de la India, este último al de Corea, quizás el de Corea pueda conocer al intendente del pueblo en el que vive esa persona a la que acabamos de seleccionar. Haciendo toda esta sucesión o vinculación, en un número finito de pasos podríamos acceder sin ningún problema hasta la persona elegida por nosotros.

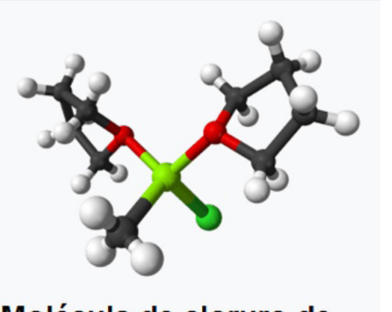
Hagámonos ahora una interesante pregunta: ¿Cuántos pasos necesitamos para relacionar a dos personas cualesquiera en el mundo, sin que estas tengan alguna relación entre ellos o un vínculo sanguíneo? La **Teoría de Grafos** establece que solamente seis pasos son suficientes para conectar a estas personas en el mundo.

La idea más aceptada y exacta a través de todo esto son **las redes**. Imaginemos lo siguiente: Tenga en su cabeza a cada uno de sus amigos y/o conocidos, e intente pensar que usted y cada uno de ellos serían un montón de puntos en el espacio. Lo primero que vamos a realizar es unir a cada uno de sus amigos a usted con una línea, mientras que a su vez cada uno de ellos también tiene su grupo de conocidos entre los que se pude encontrar usted y quizás también tengan alguno que otro conocido en común. Luego de eso haremos un nuevo enlace dado a partir de **los conocidos de sus conocidos**, agregándose más tarde a **los conocidos de los conocidos de sus conocidos**. Esto parece más bien un trabalenguas, pero no se preocupe, en realidad es muy fácil de entender. Usted y cada uno de los conocidos representarían los puntos o nodos, mientras que los vínculos de las relaciones formarían los grafos. Así tenemos resuelta la interrogante de: ¿La **Teoría de Grafos** se aplica en la vida? La respuesta es sí, y lo hace de la mejor manera, relacionándolo a usted con cualquier otra persona en el mundo sin necesariamente tener que conocerla.



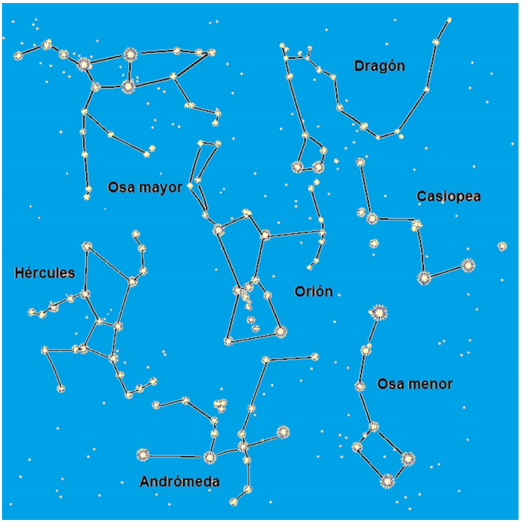
Pero probablemente sea Internet el mayor ejemplo de la existencia de la **Teoría de Grafos**. En este caso vamos a representar cada punto o nodo con cada una de las **páginas web** existentes. Estos puntos solamente van a ser unidos si una de ellas contiene un **link** con respecto a la otra y que nos lleve a ella sin tener que poner en el buscador la dirección de esa página. La pregunta es: ¿Cuántas páginas debemos recorrer para llegar de una a la otra? Aquí es donde se pone de manifiesto el importante papel que juega la **Teoría de Grafos** en todo este proceso. También nos da una plena conexión de cómo funciona Internet, en donde las compañías usan esta teoría para prestarnos cada vez más un mejor servicio.

Los compuestos orgánicos o moléculas orgánicas son compuestos químicos, más conocido como micro-molécula o estitula, que contiene carbono, formando enlaces carbono-carbono y carbono-hidrógeno. En muchos casos contienen oxígeno, nitrógeno, azufre, fósforo, boro, halógenos y otros elementos menos frecuentes en su estado natural. Estos compuestos se denominan moléculas orgánicas y se representan mediante esquemas que constituyen verdaderos grafos.



Molécula de cloruro de metilmagnesio

De una forma u otra todos conocemos algo sobre las constelaciones e incluso las identificamos al mirar el cielo estrellado, en astronomía, se trata de una agrupación convencional de estrellas, cuya posición en el cielo nocturno es aparentemente invariable. Los pueblos, generalmente de civilizaciones antiguas, decidieron vincularlas mediante trazos imaginarios, creando así siluetas virtuales sobre la esfera celeste. En la inmensidad del espacio, en cambio, las estrellas de una constelación no necesariamente están localmente asociadas; y pueden encontrarse a cientos de años luz unas de otras. Además, dichos grupos son completamente arbitrarios, ya que distintas culturas han ideado constelaciones diferentes, incluso vinculando las mismas estrellas, pero de todas formas estas representaciones ya se han incorporado a nuestra cultura y constituyen una perfecta representación mediante grafos.

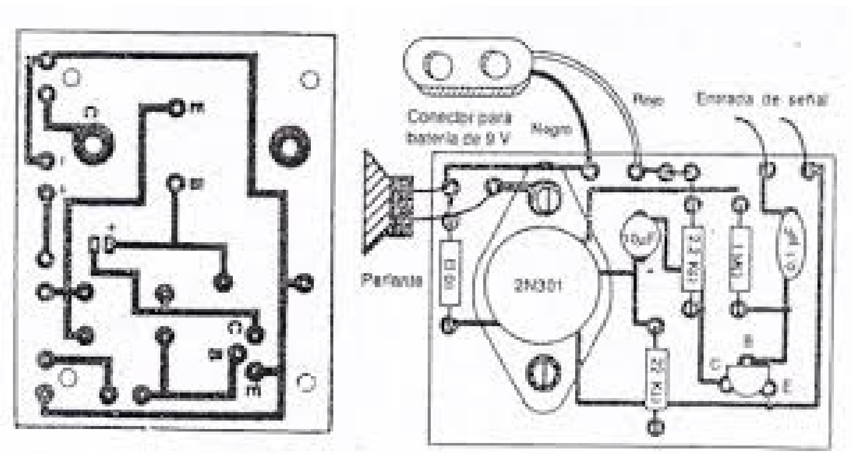


Otras visiones sobre la **Teoría de Grafos** en la vida cotidiana y en el trabajo pueden ser:

-Existen las redes de caminos interurbanos, en donde cada punto es una localización, ciudad o cualquier otro tipo de destinatario. Las conexiones entre estos puntos serían las rutas y carreteras que corren a través de la ciudad.

-También tenemos las redes de vuelos, donde los nodos son los países y ciudades, y los grafos serían las rutas aéreas.

-La **Teoría de Grafos** también está presente en las redes de transistores. Los puntos serían los transistores y los grafos serían los enlaces entre ellos.



-Las redes telefónicas también se incluyen en esta lista, ya que cada punto son los teléfonos existentes en el mundo y los grafos serían las llamadas entre ellos.

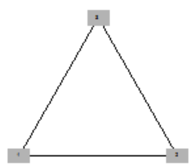
Esto nos demuestra una vez más que la matemática se encuentra mucho más pegada a nosotros de lo que en realidad estimamos que está.

La generación de grafos no ha escapado de la atención de los asistentes matemáticos.

En los referidos asistentes se parte de una idea muy simple, que un grafo es esencialmente un conjunto de “vértices” con un conjunto de pares de estos vértices conectados, a los cuales se les denomina “lados” o “arcos” en dependencia de si están “orientados” o “no orientados”.

Independientemente de las críticas a esta definición, hay un consenso generalizado sobre lo que es un grafo “orientado” o “no orientado” formulado en términos de si las aristas se consideran pares ordenados o no. De otra parte, el concepto de “grafo” puede incluir o no “bucles o auto-lazos” en el sentido de aristas que unen un vértice con él mismo, y puede incluir o no “aristas múltiples” para abarcar pares de vértices repetidos, con estos presupuestos el software Mathematica representa esencialmente un grafo como un objeto del tipo **Graph[aristas]** donde aristas representa una lista las aristas que intervienen el grafo, de acuerdo a como se defina dichas aristas el grafo va a hacer dirigido o no dirigido, con ello Mathematica posee funciones que cubren las principales exigencias de los grafos como se muestra a continuación:

```
In[25]:= Graph[{UndirectedEdge[1, 2], 2 ↔ 3, 3 ↔ 1}]
```

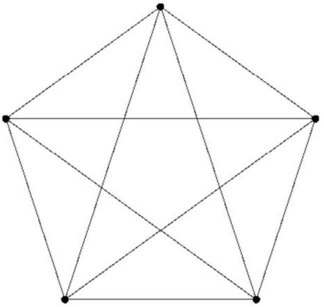


Out[25]=

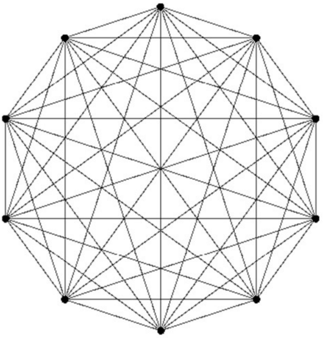
El ejemplo más simple es el de los grafos completos Kn, esto es el grafo con n vértices y una arista no dirigida entre cada par de ellos. La función

CompleteGraph[n]

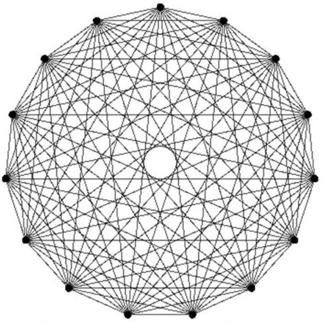
dibuja el grafo Kn colocando sus vértices de forma equidistante alrededor de un círculo.



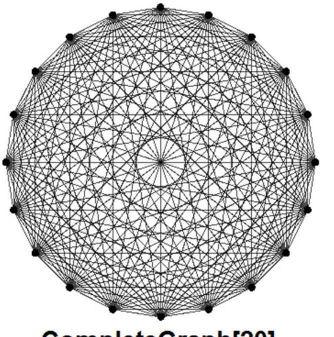
CompleteGraph[5]



CompleteGraph[10]

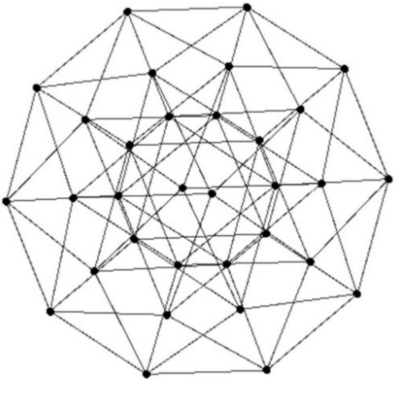


CompleteGraph[15]



CompleteGraph[20]

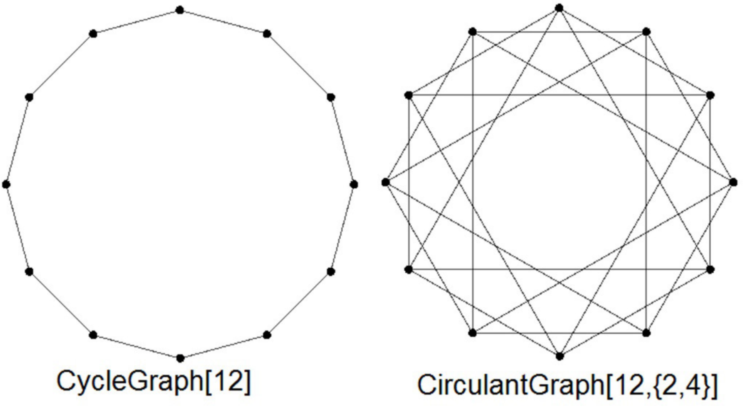
Entre los grafos clásicos se encuentra el hipercubo booleano de orden n, denominado usualmente en la literatura B^n y en el Mathematica como **HypercubeGraph[n]:**



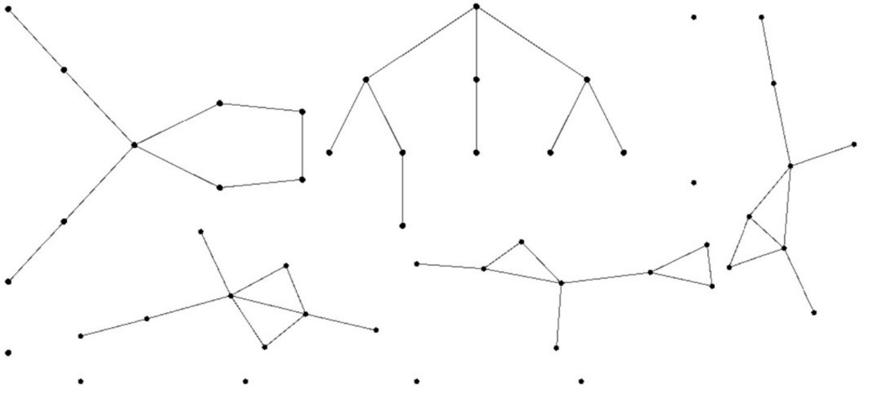
HypercubeGraph[5]

Los llamados grafos ciclos de orden n: Cn que en esencia son grafos en que cada vértice tiene grado 2, por estar conectado con el siguiente vértice y el anterior. Ellos se obtienen con la función **CycleGraph[n].**

Una generalización de los grafos ciclos de orden n son los llamados grafos circulantes construida rotando un vector n veces, que se generan en Mathematica con la función **CirculantGraph[n, lista]** que resulta en un grafo circulante de "n" vértices en el cual el i-ésimo vértice es adyacente a los vértices de orden (i-j) e (i+j) para cada j en la "lista".



En estudios de simulación puede ser útil realizar pruebas con grafos aleatorios con cierto número de vértices. La función **RandomGraph[n , p]** genera un grafo con n vértices y p aristas, pero de tal modo que cada vez que se ejecuta la función se obtiene un grafo distinto como se muestra en la siguiente imagen que recuerdan los grafos determinados por las constelaciones:



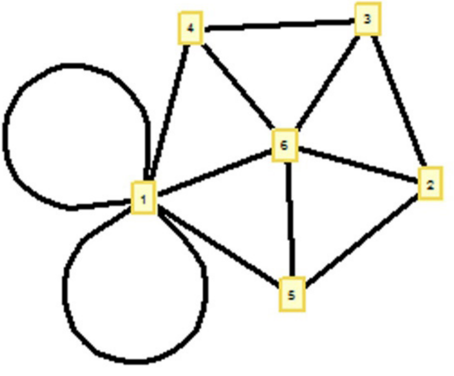
5 grafos con 10 nodos y 9 aristas generados por la función r=RandomGraph[{10,9}]

La función $\mathrm{GraphPlot}[\{v_{i1}\to v_{j1}\ ,v_{i2}\to v_{j2}\ \ldots\}]$ genera el gráfico del grafo con vértices v_{ik} conectados a vértices v_{jk}

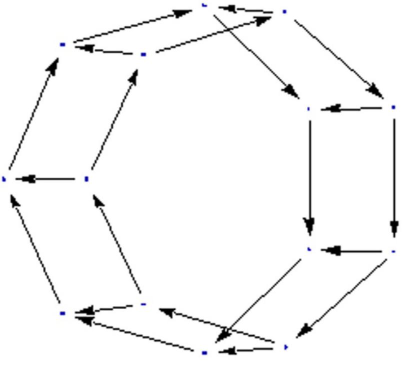
Ejemplo

$$\mathrm{GraphPlot}[\{3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 3, 5 \to 1, 5 \to 2, 6 \to 1, 6 \to 2, 6 \to 3, 6 \to 4, 6 \to 5, 1 \to 1, 1 \to 1\}, \mathrm{VertexLabeling} \to \mathrm{True}, \mathrm{SelfLoopStyle} \to 1]$$

Observe que $1\to1,1\to1$ genera un ciclo o bucle, en este caso "$\mathrm{VertexLabeling}\to\mathrm{True}$" indica que aparecerán etiquetas con los números de los vértices.

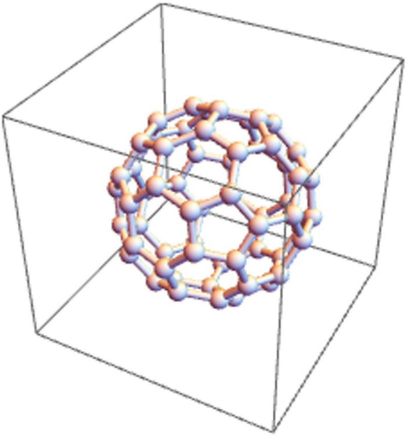


La siguiente función genera un grafo orientado, indica cómo van a ser los bordes, en este caso color negro y con flechas.



```
GraphPlot3D[{2 → 1,5 → 1,6 → 1,3 → 2,11 → 2,4 → 3,16 → 3,5 → 4,21 → 4,26 →
5,7 → 6,10 → 6,8 → 7,30 → 7,9 → 8,42 → 8,10 → 9,38 → 9,12 → 10,12 → 11,15 →
11,13 → 12,14 → 13,37 → 13,15 → 14,33 → 14,17 → 15,17 → 16,20 → 16,18 →
17,19 → 18,32 → 18,20 → 19,53 → 19,22 → 20,22 → 21,25 → 21,23 → 22,24 →
23,52 → 23,25 → 24,48 → 24,27 → 25,27 → 26,30 → 26,28 → 27,29 → 28,47 →
28,30 → 29,43 → 29,32 → 31,35 → 31,54 → 31,33 → 32,34 → 33,35 → 34,36 →
34,56 → 35,37 → 36,40 → 36,38 → 37,39 → 38,40 → 39,41 → 39,57 → 40,42 →
41,45 → 41,43 → 42,44 → 43,45 → 44,46 → 44,58 → 45,47 → 46,50 → 46,48 →
47,49 → 48,50 → 49,51 → 49,59 → 50,52 → 51,55 → 51,53 → 52,54 → 53,55 →
54,60 → 55,57 → 56,60 → 56,58 → 57,59 → 58,60 → 59}, EdgeRenderingFunction →
({Cylinder[#1,.1]}&), VertexRenderingFunction → ({Sphere[#,.25]}&)]
```

Finalmente, la función que genera un grafo en tres dimensiones en forma de esfera:



En este capítulo hemos abordado un tema muy complejo y fascinante, el cual sirve tanto para la vida, diversión o investigación. Quizás al principio usted pudo haberse sorprendido del título, pero dígase a usted mismo si los grafos no constituyen una verdadera telaraña de la matemática. Sin embargo, esta no sería ni por asomo la telaraña más grande de todas, todavía existe una que se encuentra incluso en la naturaleza. Le invito a seguir explorando el maravilloso mundo de la matemática a través de los diversos capítulos que le propongo.

Capítulo V. Los juegos y la matemática

“El concepto de juego que se tiene suele ser suficiente para su práctica, No obstante, es demasiado impreciso para hacer posible una exacta constitución científica”.

John von Neumann

5.1. La teoría de los juegos

Probablemente sea la infancia una de las etapas de nuestra vida cuyo desenlace tiene un papel excesivamente importante. Desde pequeños estamos acostumbrados a jugar diversos tipos de juegos, ya sea echar carreras con nuestros autos de juguete, tomar unas pistolas de plástico y decir que somos policías, agarrar unas espadas y decir que somos caballeros. Nuestro único límite cuando somos niños es la imaginación y el cansancio, puesto que, si lo nos diesen a elegir, probablemente nunca querríamos haber abandonado esa fase de nuestra vida. Lo que bien define a ese período es nuestra capacidad de llevar a cabo distintos tipos de juegos.

Hoy en la actualidad se piensa que los adultos deben, por todas las medidas, dejar atrás todo ese tiempo en el que también se divirtieron, para así abrir paso a sus preocupaciones. Si un adulto se aparece un día y decide no querer jugar más en la vida, entonces ese es su problema, no yo ni nadie tiene derecho a juzgar sus gustos y decisiones. Sin embargo, no estaría de acuerdo si alguien me dijese: “Los juegos son cosa de niños. Cuando eres grande se pierde todo el interés hacia ellos. No tienen nada de emocionante, ya que todo depende de suerte o de imaginación, cosas de las que no debes depender nunca en la vida”. Con esa frase nunca estaría de acuerdo. Quisiera pedirles a todas esas personas que piensan de esa forma y que posean el libro, que se adentren un poco más allá en este capítulo y descubramos juntos qué es lo que verdaderamente se puede encontrar detrás de un juego.

Como se ha dicho al inicio del libro: “La imaginación es el arma más poderosa de un matemático”. Y es muy cierto, ya que es lo que nos permite ver desde distintos puntos de vista las diversas soluciones que nos ofrece cualquier problema.

La **teoría de los juegos** es una de las ramas de la ciencia matemática que nos permite analizar todas las estrategias posibles que se pueden sacar de una situación y usarlas a favor del individuo. Eso nos deja claro que la suerte no juega ningún papel en todo este tema. Quizás solo un poco, pero su función es apenas relevante.

Los antecedentes de la teoría de juegos hay que buscarlos en los trabajos de Zermelo,[xxiv] el cual expone que ciertos juegos como el ajedrez son, pero contrario a su nombre, la Teoría de Juegos no surgió precisamente con el objetivo de echar unas partidas con los amigos, sino de "jugar" con la economía. Sin embargo, en los últimos tiempos ha tenido una sustanciosa importante en el campo de la biología, sociología, politología, psicología, filosofía y ciencias de la computación. Quizás los primeros en trabajar con esta teoría, o tal vez los que mayor relevancia tuvieron en los inicios de esta, fueron los matemáticos **John von Neumann**[xxv] y **Oskar Morgenstern**[xxvi], trabajando con ella durante la Guerra Fría[xxvii] y antes de esta. Tuvieron la "amabilidad" de incursionar en la **teoría de juego** debido a que también ha tenido mucha influencia en el desarrollo de estrategias militares.

Antes de continuar, como buenos matemáticos tenemos que precisar algunos conceptos que son fundamentales para continuar hablando sobre el tema:

1. ¿Qué es un juego?

    » **Un juego es cualquier situación de decisión caracterizada por una interdependencia estratégica, gobernada por reglas y con un resultado definido.**

    » El resultado que obtiene una empresa depende no sólo de la estrategia que elige, sino también de las estrategias que eligen los otros competidores guiados por sus propios intereses.

    » La solución de un juego debería indicar a cada jugador qué resultado esperar y cómo alcanzarlo.

    » **Los participantes de un juego intentan obtener el mejor resultado para sus intereses.** Por lo tanto, **un juego es un problema de maximización**, uno para cada jugador.

» **La teoría de juegos**, como cualquier otra teoría general, provee vinculaciones: **muestra cómo situaciones aparentemente diversas tienen la misma estructura lógica.**

» **La interdependencia genera muchas veces competencia** entre los participantes del juego, **pero los jugadores también pueden tener algunos intereses compartidos.**

» Un juego puede ser comparado con la división de una tarta cuyo tamaño puede aumentar o reducirse como resultado de acciones de los jugadores.

» Los jugadores tienen un interés común en agrandar la tarta, pero tendrán intereses en conflicto al momento de acordar dividirla.

» **Un juego consiste en:**

1. Al menos dos jugadores.

2. Un conjunto de estrategias para cada jugador.

3. Una relación de preferencia sobre posibles resultados.

» **El jugador es generalmente una entidad**: Individuo, compañía, nación, animal, etc.

» **Las estrategias**: Acciones que un jugador selecciona a seguir.

» **Las salidas:** Determinadas por la mutua selección de estrategias.

» **Relación de preferencia:** Modelada como la utilidad (pago) de un conjunto de salidas.

2. ¿Qué es una estrategia?

Según el diccionario de la Real Academia Española (RAE), estrategia. (Del lat. *strategĭa*, y este del gr. *στρατηγία*). f. Arte de dirigir las operaciones militares. || 2. Arte, traza para dirigir un asunto. || 3. Mat. En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento.

En la teoría de juegos una ***estrategia*** es un concepto muy importante, con un sentido más concreto que el que se le da habitualmente, ellas deben conducir a la toma de decisiones óptimas en cada momento, por eso de ella se dice que:

» Es un plan muy específico.

» Es la descripción ***completa*** de una forma determinada de jugar, independientemente de lo que hacen los demás jugadores y de la duración de un juego.

3. ¿Qué relación hay entre conducta racional y la información?

   » La teoría de juegos considera que los jugadores son racionales y solo les interesa ganar.

   » Se supone que los jugadores tienen un conocimiento total y una comprensión absoluta de las reglas, además de una memoria perfecta que les permite recordar todas las jugadas anteriores.

   Estos presupuestos son fundamentales porque en el momento de tomar una decisión no se puede entrar en consideraciones de que algún jugador tenga problemas de raciocinio, o que no conozca bien las reglas o que no las recuerde en el momento de aplicarla.

4. ¿Qué se entiende por racionalidad estratégica?

   En teoría de juegos la racionalidad significa que ***cada jugador hace lo mejor que puede dada la información con que cuenta al momento de tomar la decisión***. Ser racional significa no cometer el mismo error en forma consistente.

   Dada la interdependencia entre jugadores, una decisión racional debe basarse en una predicción de la respuesta de otros jugadores. Al "ponerse uno en los zapatos del otro" y predecir entonces la acción que el otro tomaría, se puede elegir el mejor curso de acción propio.

5. ¿Qué se entiende por información perfecta/imperfecta?

   » Un jugador tiene información perfecta si conoce exactamente lo que ocurre cada vez que toma una decisión.

   » Un juego tiene información perfecta si cada jugador tiene información perfecta.

   » Si algún jugador no tiene información perfecta, el juego es de información imperfecta.

6. ¿Qué se entiende por juegos con información imperfecta?

   » La información es imperfecta si el jugador, en el momento de tomar una decisión, no sabe dónde está en el juego.

- » Para poder incluir información imperfecta en un juego necesitamos un mecanismo para representar el azar y otro que muestre los efectos del azar sobre el juego.
- » Un conjunto de información asignado al azar significa que es el azar el que debe realizar su jugada.
- » Las ramas que parten de un nodo de azar representan probabilidades.
- » Cualquier conjunto de información que contiene más de un nodo refleja que el jugador tiene información imperfecta.
- » Un jugador no sabe en qué nodo estará cuando le corresponda hacer su jugada. Lo único que conoce son las probabilidades con que se llega a cada uno de esos nodos.
- » Aunque la información sea imperfecta, se hace necesario tomar una decisión.
- » Para solucionar su problema de decisión, un jugador debe comparar la utilidad esperada de las alternativas a su disposición.
- » Muchas decisiones deben tomarse sin tener conocimiento completo de sus consecuencias.
- » Los tomadores de decisiones deben decidir no solamente acerca de cuáles riesgos son aceptables sino también acerca de la manera en que las incertidumbres que enfrentan los otros jugadores pueden afectar sus decisiones.
- » La dispersión de información introduce un papel para estrategias ofensivas y defensivas: cómo aprovechar cualquier ventaja informativa propia y cómo limitar las ventajas de información de otros.

La primera contribución que tuvo **John von Neumann** en la **teoría de juego** fue a partir del desarrollo del **teorema minimax** en 1928. Este teorema establece que en ciertos juegos de suma cero, que involucran información perfecta, o sea, cuando cada jugador conoce de antemano la estrategia de su oponente y sus consecuencias, existe una estrategia que permite a ambos jugadores minimizar su máxima pérdida (de ahí el nombre “minimax”). Cada jugador debe hacer un exhaustivo análisis de todas sus posibles estrategias y también de las que el adversario disponga, además de la máxima cantidad de pérdidas que ese juego puede conllevar.

Este matemático no solamente trabajó la **teoría de juego** en solitario, sino que junto a **Oskar Morgenstern** escribió el clásico libro **"Theory of Games and Economic Behavior" (La Teoría de los Juegos y el Comportamiento Económico)**, el cual fue publicado en 1944 y fue considerado ampliamente como el texto innovador que creó el campo de investigación interdisciplinario de la teoría de juegos.

Fácilmente se ha confundido la **teoría de juego** con la **teoría de la decisión**, ya que la primera estudia las distintas decisiones en diferentes entornos con los que se lleva a cabo una interacción. Para decirlo de otra manera, estudia las decisiones que puede tomar un individuo cuando los costes y las consecuencias, tanto buenas como malas, no se encuentran explícitamente fijadas.

Actualmente existen dos tipos de juego: **Juegos simétricos y asimétricos** y **Juegos de suma cero y de suma distinta de cero**. El primer caso está caracterizado porque las recompensas obtenidas al culminar la partida dependen con absoluta plenitud de las habilidades otros individuos y no precisamente de quien esté jugando. *"Si las identidades de los jugadores pueden cambiarse sin que cambien las recompensas de las estrategias, entonces el juego es simétrico".* Muchos de los juegos más jugados, usualmente de 2x2, son simétricos. Ejemplos famosos de juegos simétricos pueden ser **El Juego de La Gallina**, **El Dilema del Prisionero** y **La Caza del Ciervo**. Más adelante indagaremos en cada uno de ellos.

Existen también diversas maneras en las que se puede representar un juego asimétrico, sin embargo, los casos más estudiados son en los que no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambos jugadores. Casos muy famosos de juegos asimétricos son **El Juego del Ultimátum** y **El Juego del Dictador**. También hablaremos de ellos más adelante. Estos juegos suelen identificarse porque cada jugador puede poseer su propio tipo de estrategia, sin embargo, existen casos de juegos asimétricos que poseen estrategias iguales para ambos jugadores.

El segundo tipo de juego son: **Juegos de suma cero y de suma distinta de cero**, en los que cada posible variación de estrategias va a sumar siempre cero, en otras palabras, un jugador se verá siempre beneficiado por las acciones del jugador contrario. Ejemplos de estos tipos de juegos pueden ser los clásicos **GO**, **Póker** y **Ajedrez**. Hubo una época en la estuvo considerado el fútbol como un tipo de **juego de suma cero**, esto era debido a que las victorias marcaban 2 puntos y los empates 1, pero en la actualidad se otorgan 3 puntos a la victoria y 1 punto al empate.

5.2. El dilema del prisionero

Como primer ejemplo de la **teoría de juego** comenzaremos con este singular problema, el cual demuestra la necesidad de los jugadores sobre no cooperar entre ellos, aunque esto signifique un gran predicamento para cada uno de ellos. Los creadores de **El Dilema del Prisionero** fueron los matemáticos Merrill M. Flood[xxviii] y Melvin Dresher.

El problema consiste en lo siguiente:

"La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor".

Aquí podemos ver en evidencia que el primer punto cuestionado en este problema es la confianza. Cada prisionero tiene dos opciones distintas: puede bien traicionar a su compañero y declarar, o serle fiel y quedarse callado. Al principio puede parecer sencillo, pero no lo es, más bien se debe a que cada uno de ellos no sabe con seguridad lo que puede hacer el otro. Incluso si lo supieran, en una situación tan extrema como esa, ninguno de los dos va a tener la cordura suficiente como para confiar en su compañero.

Como el nombre lo indica, cada prisionero se encuentra parado ante un fuerte dilema. El confesar o no hacerlo puede conllevarlos a tener más, menos o ningún tipo de condena, el problema siempre es imaginarse lo que puede hacer el otro y tomar la decisión que más les convenga a ambos.

Si el primero espera a que su cómplice confiese, lo más sensato sería confesar también, pues de lo contrario el único afectado sería este, mientras que al otro se le da la libertad. Si se sabe que el primero no va a confesar, entonces aparecen las opciones de ser fieles a su confianza y tampoco hacerlo (lo que llevaría a una condena mutua) o confesar y esperar a que solo él termine tras las rejas. Si el primero supone que su cómplice no dirá nada, entonces sucede lo mismo que en el caso anterior, pues puede quedarse callado y aceptar la condena mutua, o salirse con la suya y hacer que encierren a su compañero.

La estrategia de que ambos delincuentes confiesen supone el método más factible, ya que en esos casos ninguno puede saber precisamente lo que hará el otro. Por desgracia esto conduce a un resultado regular, en el que ninguno de ellos traiciona la confianza que tenía depositada en el otro, pero que igual termina siendo una larga condena, haciendo así que todas las demás opciones no hubiesen valido de mucho. Por estas razones es que el problema obtiene en su título la palabra “dilema”.

Sin embargo. Podemos tomar todo esto también con tres opciones, haciendo que la palabra dilema sea “anulada”. Dichas opciones son: **cooperar**, **no cooperar** y la tercera que sería **no jugar**. Ya que el individuo carece de tanta información como para llevar a cabo una estrategia de juego, podría tomar la opción de abstenerse al juego, recibir la condena esperada por no confesar, pero dejaría de ser un dilema.

Quizás la situación del prisionero nos parezca demasiado macabra y hasta alejada de la realidad por eso, a partir de la información dada vamos a hacer una propuesta más cercana al ambiente estudiantil y de la relación profesor alumno donde el problema que presentamos al menos puede convertirse en realidad.

Durante un examen parcial el profesor ve que dos alumnos están hablando, por lo que supone que están copiando, aunque no está seguro del todo (profesor, ¿cuántas veces le ha sucedido esto? y, usted alumno, ¿no ha sido víctima de situación semejante, o lo han sorprendido in fraganti?). Para descubrir si los alumnos estaban copiando el profesor habla con cada uno de los alumnos por separado y les dice que:

1. Si confiesa y el otro lo niega, corregirá su examen y no sufrirán castigo, mientras que el otro irá directamente a septiembre.
2. Si lo niegan, pero su compañero confiesa, tendrá que ir a septiembre, mientras que su compañero se librará.
3. Si los dos permanecen callados, lo único que les pasará es que tendrán que hacer un trabajo.
4. Sin embargo, si ambos alumnos confiesan tendrán que repetir el examen.

La matriz del juego es como sigue:

	Alumno A lo niega	**Alumno A confiesa**
Alumno B lo niega	Ambos tienen que hacer un trabajo.	A no sufre castigo y B tiene que ir directamente a septiembre.
Alumno B confiesa	A va directamente a septiembre y B no sufre castigo.	Ambos tienen que repetir el examen.

Si ambos alumnos siguen una estrategia egoísta, es decir, sólo les interesa su propio beneficio entonces,

1. Si uno de los alumnos piensa que su compañero no le va a traicionar, por lo tanto, si él confiesa, se libra del castigo pero que su compañero suspende el examen y tiene que hacerlo en septiembre.
2. Si este mismo alumno piensa que su compañero va a confesar para intentar librarse del castigo, la mejor opción es confesar también. De esta forma se evita ir directamente al examen de septiembre ya que tiene la opción de repetir el examen.

Conclusión: con una estrategia egoísta no se consigue el resultado óptimo.

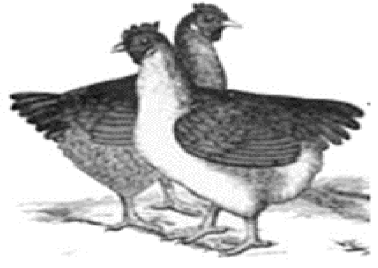
Si ambos alumnos deciden no traicionar a su compañero, entonces sólo tendrían que hacer un trabajo.

Conclusión: esta es la estrategia óptima.

Sin embargo, en la práctica la estrategia dominante es confesar, y esto les lleva a un resultado en el que tienen que trabajar más, ya sea repetir el examen ahora o ir directamente a septiembre.

5.3. El juego de la gallina

Este juego puede apreciarse, sobre todo, en muchas películas de acción, debido a contiene como uno de sus requisitos más importantes el de tener cierto grado de valentía. Sin embargo, suele desconocerse todos los verdaderos análisis a partir de la **teoría de juego** que deben realizarse en este singular caso.



El juego es muy sencillo: Solamente participan dos jugadores (existen filmes en los que participan más, pero se generaliza solamente con dos) que van montados sobre vehículos automovilísticos. Lo curioso de esto es que conducen en sentido opuesto cada uno, o sea, cada "jugador" se dirige directamente a chocar con el otro. Pierde el "jugador" que primero se desvíe del trayecto, pues no ha mostrado el valor suficiente como para seguir adelante y será deshonrado diciendo que es una gallina. De aquí el surgimiento del nombre.

Este juego no suele aplicarse en la vida real (cosa que está muy bien) debido a las altas consecuencias que lleva consigo. Sin embargo, diversos adolescentes con un temperamento compulsivo han sido testigos de los efectos que trae consigo desarrollar este juego.

El matemático Bertrand Russell[xxix] hizo una comparación de este juego con la carrera armamentística. Esto se debe a que en ambos casos no se consigue beneficio alguno y solo el orgullo es lo que impulsa a las diversas acciones que conllevan a un destino trágico.

Una manera muy singular de ver a este juego podría ser el imaginárselo como “una negociación”. Podríamos decir que ambos “jugadores” podrían estar en medio del trayecto, en el cual pueden “negociar” quién sería el que se desvíe. Si ninguno de ellos llega a un acuerdo, entonces se producirá la colisión que los llevará a ambos a perder.

Analicemos todas las posibles estrategias a partir de tener un conocimiento previo de cómo puede ser nuestro rival. Pongamos de ejemplo que somos el primer conductor, además de que sabemos que el otro es una persona razonable.

	ARROGANTE	**PACÍFICO**
ARROGANTE	.Colisión	Victoria.
PACÍFICO	Derrota	Victoria mutua (suponiendo que ambos se retiren al mismo tiempo).

Evidentemente, lo que más nos conviene es seguir adelante, pues el otro hará lo que sea para no salir lastimado y girará unos metros antes de que los vehículos se encuentren. Por otro lado, si el otro conductor tiene una actitud arrogante y competitiva, solo nos queda cuestionarnos a nosotros “¿Cómo somos?” Si nuestra actitud es pacífica y conservadora, entonces perderíamos al retirarnos de la trayectoria, pero si somos egoístas, solamente nos queda la opción de empatar una “victoria” y chocar con el otro.

5.4. La caza del ciervo

Este es un juego singular que involucra, al igual que en El Dilema del Prisionero, la capacidad de cooperación entre los participantes, además de suponer un conflicto de seguridad en uno mismo. Este juego también ha ido adquiriendo algunos otros nombres variados, como han sido: “El Juego de la Seguridad” “El Juego de la Coordinación” “El Dilema de la Credibilidad”. El creador de este juego fue el filósofo sueco Jean-Jacques Rousseau[xxx], en donde tenía como meta describir una situación en la que dos hombres se iban de caza.

El juego, como la mayoría de los que involucran a esta teoría, se basa en ir tomando acciones sin saber precisamente cuáles son las que tu contrincante podría tener en cuenta. El juego consiste en elegir si cazar un ciervo o un conejo. Si un jugador llega a cazar un ciervo, entonces debe hacer una cooperación con el compañero si quiere que la partida le salga exitosa. También puede optarse por hacerle caza al conejo, sin embargo, este animal tiene un valor muy inferior al del ciervo. La ventaja de esta última acción es que puedes cazar a ese animal sin la necesidad de requerir la ayuda de tu otro compañero.

De esta manera, si el primer compañero decide cazar un ciervo, lo más lógico sería que el otro también decida hacerlo, puesto que ninguno querría perder la partida. La gráfica de puntuación sería la siguiente (Ciervo = 2   Conejo = 1)

	CIERVO	**CONEJO**
CIERVO	2 - 2	2 -1
CONEJO	1 - 2	1 -1

Muchos suelen afirmar que **El Dilema del Prisionero** es el juego que tiene una mejor representación del problema de la cooperación social, sin embargo, expertos matemáticos afirman que **La Caza del Ciervo** lleva consigo un contexto igual o de mayor interés para estudiar el sentido de la cooperación y los problemas que este conlleva desarrollarlo.

Otro ejemplo muy claro que está estrechamente relacionado con este juego puede ser la situación en la que dos colegas se encuentren sentados en un bote de remos. El movimiento del bote solamente va a estar dado si ambos compañeros deciden remar, pero si uno de ellos decide no hacerlo, entonces el otro gastará rápidamente sus energías. El problema de la cooperación está claramente situado en este ejemplo y llegando a relacionarlo con **La Caza del Ciervo**, ya que en ambos se necesita de la voluntad de ambos sujetos para llevar a cabo la operación deseada.

5.5. El juego del ultimátum

Como ya les he mencionado antes, la **teoría de juego** no solo se basa en crear situaciones que nos ayuden a adentrarnos en las emociones humanas, sino que también nos ayuda a desarrollar un fuerte sentido en la rama de la economía, intentando siempre ponerla a favor de uno.

En este juego cada jugador hará una interacción de forma anónima y una sola vez, haciendo que no exista problema por parte de la reciprocidad. Consiste en lo siguiente:

"Un jugador A tendrá una suma de dinero elevada, la cual se prefiere que sea una cantidad agradable (100 $). Este primer jugador le hará una proposición a un jugador B, que consistirá en decir cuánto ganaría cada uno (Por ejemplo, ambos se quedan con el 50%). El único papel que empleará el jugador B será el de elegir si aceptar o no la cantidad que se queda ofrecida. En el caso de no aceptarla, nadie se lleva el dinero.

Vuestra intuición puede llevarlos a ustedes a pensar que el jugador B no aceptaría a menos de que esta propuesta esté marcada por una relación equitativa o que le sea favorable en su totalidad. Sin embargo, puede no ser así, ya que les recuerdo que el jugador B no comienza con ninguna cantidad en efectivo, por lo que cualquier cifra podría serle de ayuda para favorecer su economía.

Este problema ha traído consigo una gran conmoción en el mundo debido a las consecuencias que puede llevar hacer un uso "serio" de este método para ganar dinero. Este experimento se ha realizado en diversos países de todo el mundo a lo largo de varios años. Por lo general, muchas veces el jugador B se ha sentido abusado con respecto a lo que se le ofrece y ha optado por la decisión de que ninguno gane nada, haciendo que el que hace la propuesta termine enojándose. Sin embargo, se ha demostrado que en ningún caso real se ha buscado hacer abuso alguno, incluso ha habido momentos en el que al jugador B se le ha propuesto una cantidad superior.

A veces se utiliza este ejemplo para demostrar que en la mayoría de las ocasiones el ser humano prefiere conservar un valor de equidad antes que ser materialista y desviarse por la vía económica.

5.6. El rey Salomón aplicó la Teoría de Juegos.

Por su interés, se ha tomado y adaptado del libro "Teoría de Juegos" de Augusto I. Rufasto el epígrafe titulado "El sabio rey Salomón hace uso de la Teoría de Juegos".

Si se toma la Biblia en I Reyes 3,16-28 se tiene el siguiente relato:

JUICIO DE SALOMÓN

16 Dos prostitutas fueron a ver al rey; se presentaron ante él, 17 y una de ellas dijo: "¡Con permiso, señor mío! Esta mujer y yo vivimos en la misma casa, y yo di a luz junto a ella en casa. 18 A los tres días de mi parto, dio a luz también esta mujer. Estábamos juntas y ningún extraño había con nosotras en casa, fuera de nosotras dos. 19 Una noche murió el hijo de esta mujer, por haberse acostado ella sobre él; 20 ella se levantó a medianoche, tomó a mi niño de mi lado, mientras tu sierva dormía, y lo acostó en su regazo, y a su hijo muerto lo acostó en mi seno. 21 Cuando por la mañana me fui a levantar para dar el pecho a mi hijo, lo encontré muerto. Pero, examinándole luego atentamente a la luz del día, vi que no era mi hijo, el que yo había dado a luz". 22 La otra mujer replicó: "No es verdad, pues mi hijo es el vivo y el tuyo es el muerto". La primera decía: "No, tu hijo es el muerto, y mi hijo el vivo". De esta suerte disputaban delante del rey.

23 El rey reflexionó: "La una dice: Éste es mi hijo, el vivo; el tuyo es el muerto. La otra replica: No, tu hijo es el muerto y mi hijo el vivo". 24 Y ordenó: "Traedme una espada". Se la trajeron, 25 y el rey ordenó: "Partid en dos el niño vivo y dad la mitad a cada una". 26 Entonces la madre del niño vivo, sintiendo conmoverse sus entrañas por su hijo, dijo: "¡Por favor, señor mío! Dale a ella el niño vivo, pero matarle... ¡no, que no le maten!". La otra, en cambio, decía: "Que no sea ni para mí ni para ti; que lo partan".

27 Entonces el rey tomó la palabra y sentenció: "Dad a la primera el niño vivo, y no le matéis; ella

es su madre”. 28 Todo Israel se enteró de la sentencia que el rey había pronunciado y todos temieron al rey, viendo que había en él una sabiduría divina para administrar justicia.

Es indudable que Salomón no conocía la Teoría de Juegos, pero esta disciplina involucra en grado alto la capacidad analítica y proyectiva del ser humano como la que se pone de manifiesto en el relato bíblico y por esa posibilidad de poderse aplicar a una gran diversidad de situaciones, se evidencia en la referida narración un tipo de análisis propio de la Teoría de Juegos.

Ante la ausencia de datos o indicios tangibles, Salomón debía creer a una de las dos mujeres, luego de lo cual el bebé sería entregado a la mujer considerada la madre de éste.

Demostrando que su gran sabiduría lo relevaba de la necesidad de mayor información, Salomón “elaboró un juego”, el cual tomó la forma de una propuesta: “Con esta espada habrá de partirse al bebé, luego de lo cual se dará una mitad del niño a cada mujer”.

Inteligentemente, el sabio rey recurrió a una proposición perfectamente aceptable si ella era aplicada a juicios sobre materias y objetos comerciales. Este juego exaltaría la voluntad competitiva de obtener ganancia en grado máximo. El truco de Salomón consistía en que una valoración primordial de competencia rivalizaba con la valoración dictada por el amor maternal.

El criterio de optimización individual llevó a una de las madres a aceptar la peculiar propuesta salomónica. El criterio de amor maternal llevó a la otra madre a pedir una solución inscrita en la optimización colectiva: prefería que el niño siguiera entero, contentándose con sólo saber que él seguía vivo, aun si no pudiera nunca más volver a verlo.

En este caso lo que sucedió es que Salomón conocía la naturaleza del bienestar que siente una madre en relación a tener a su hijo. Salomón entendió que toda madre observa la siguiente escala de valores:

- Primero: Que su hijo exista, que conserve su vida.
- Segundo: Tener a su hijo consigo.

Salomón hizo la suposición de que sólo la verdadera madre podría instintivamente conocer y respetar esta escala. Trabajando en base a dicha suposición, las sometió a una crisis, cuya solución evidente les permitiría acceder a sólo una parte del premio, o a renunciar completamente el premio. Este premio era la tenencia del hijo, es decir, un pago correspondiente al segundo nivel de la escala de valores.

La falsa madre, por su parte, tenía la siguiente escala de valores:

- Primero: Tener al hijo consigo.
- Segundo: Conservar por lo menos una parte del hijo consigo.

Esto, traducido a términos análogos a los de la escala de valores de una verdadera madre, toma la forma de:

- Primero: Tener al hijo consigo.
- Segundo: Aunque eso conllevara la pérdida de su vida, conservar una parte del hijo consigo.

Sin embargo, eso mismo llevado a una escala de valores materiales, equivale a:

- Primero: Ganar todo el premio.
- Segundo: Ganar al menos una parte del premio.

Es decir que la lógica de la falsa madre era materialista, mientras que la lógica de la verdadera madre era "lógica de madre". De hecho, Salomón supuso que la falsa madre seguiría la lógica materialista que es apropiada para la mayoría de problemas de obtención de premios, en tanto que la verdadera madre seguiría la lógica de madre. El problema impuesto por Salomón, de cumplirse las suposiciones de sabio, quitaría el disfraz de madre a la falsa madre.

5.7. ¿Para qué nos sirve la teoría de juego en la vida?

Hemos hecho algunas menciones sobre diversos métodos en los que la **teoría de juego** ha cobrado un papel relevante, sin embargo, todavía quedan algunos detalles que deberíamos ultimar.

La **teoría de juego** nos ofrece la posibilidad de salirnos con la nuestra en una situación en la que se nos presente la **Ley de Oferta y Demanda**. Digamos que estamos en una hipotética entrevista de trabajo y el encargado ha decido contratarnos. Llega entonces el momento de fijar un sueldo para nosotros. Si somos lo suficientemente inteligentes, de antemano a la hora de asistir por primera vez a la entrevista, debíamos de saber cuál sería el salario promedio que normalmente había quedado establecido. En ese caso lo más sensato sería lanzar una cifra bastante elevada y esperando que nuestro superior nos proponga una más baja. Al cabo de un rato se llegaría a un punto medio en el que su sueldo final terminaría siendo más alto del que se estimaba asignarle.

La **teoría de juego** nos puede favorecer mucho a la hora de las apuestas en un casino o con los colegas. Digamos que estamos jugando al **BlackJack** (“Veintiuno” en otros países). Si sabemos de antemano la capacidad de mentir o decir verdad del individuo que tiene la mano, entonces podemos saber qué probabilidades tenemos de perder o ganar dinero.

Le propongo que sea inteligente y saque partido de este capítulo, ya que les ofrezco la opción de pensar en una vía más inteligente cada vez que se encuentre frente a un problema que lleve determinadas reglas. Una vez más ha quedado demostrado que la matemática es capaz de encontrarse en un lugar tan intrincado como son los juegos. Ahora le invito a recordar cada momento de su infancia, o de estos días, en los que hubo un juego de por medio. Recuerde que incluso allí estuvo practicando esta maravillosa ciencia.

Capítulo VI. ¿Juegos de niños?

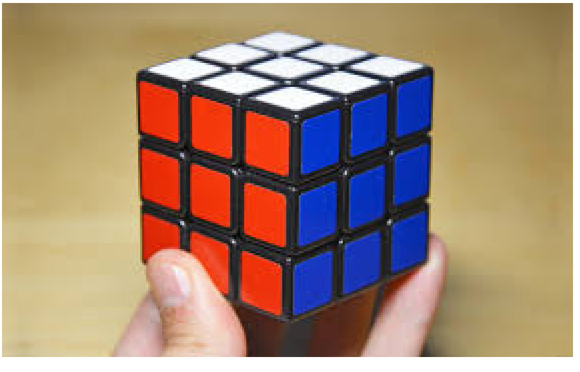
"El juego es la más pura invención del hombre; todas las demás le vienen, más o menos, impuestas y preformadas por la realidad. Pero las reglas de un juego —y no hay juego sin reglas— crean un mundo que no existe. Y las reglas son pura invención humana. Dios hizo al mundo, este mundo; bien, pero el hombre hizo el ajedrez —el ajedrez y todos los demás juegos. El hombre hizo, hace... el otro mundo, el verdaderamente otro, el mundo que es broma y farsa".

José Ortega y Gasset

6.1. El cubo de Rubik

Anteriormente hemos hablado sobre la teoría de juegos, su importancia para la vida y las posibilidades que esta ofrece para el desarrollo cognitivo de las personas. Si bien sabemos que los juegos por turnos son una forma eficaz y divertida de aprender, entonces no deberíamos pasar por alto a todos aquellos juguetes que también han sido diseñados con la finalidad de estimular el pensamiento.

A lo largo de la historia se han desarrollado distintos juguetes que se han vuelto famosos gracias al infinito aporte intelectual que son capaces de ofrecernos. En este capítulo nos dedicaremos a analizar algunos de esos juguetes.



Comencemos por un gran clásico de los juguetes matemáticos, el cual probablemente ninguno de ustedes ha sido capaz de pasar por alto en vuestras vidas.

El **Cubo de Rubik** fue concebido en 1974 por el profesor húngaro de arquitectura **Erno Rubik**[xxxi]. El nombre que se le había atribuido a este juguete en un principio había sido el de “cubo mágico” (*Bűvös kocka*), el cual fue licenciado más adelante por su autor para ser vendido por la compañía **Ideal Toy Corp.** En el año 1980**.** Su aceptación ha sido tan grande que le concedió el galardón de “Mejor Juego del Año”. Su venta ha sido una explosión total a través de todo el globo terráqueo, vendiendo de esta manera una cifra que supera el comercio de más de 350 millones de ejemplares.

El **Cubo de Rubik** es un hexaedro cúbico que posee en cada una de sus caras un color diferente, los clásicos suelen poseer el blanco, rojo, azul, amarillo, verde y naranja, pero varias versiones le han cambiado su estética o le han incluido imágenes de paisajes entre otras muchas. Su mecanismo está compuesto por un sistema de ejes rotatorios, el cual permite que cada una de las caras gire de forma independiente.

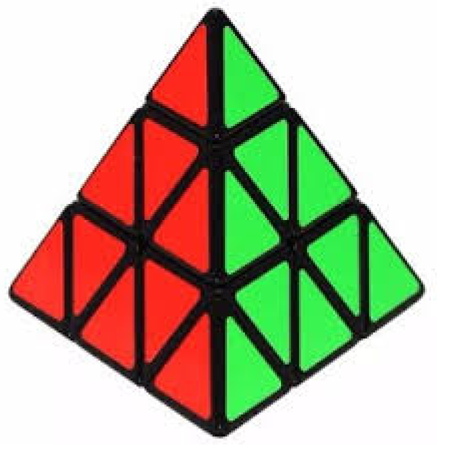
INTERIOR DE UN CUBO DE RUBIK

Podríamos afirmar que el surgimiento de este singular rompecabezas fue dado no por un error, sino por la necesidad de su creador para enseñarles a sus alumnos la funcionalidad de un cuerpo en tres dimensiones. También se llega a afirmar que el verdadero propósito del dispositivo sí era el de mover cada una de las partes independientemente sin que toda estructura se viniera abajo. Lo curioso de todo esto es que el mismísimo Rubik no se había dado cuenta de que había creado un potente rompecabezas hasta que movió una de sus caras por primera vez e intentó regresarla a su posición original.

Si bien conocemos a la forma clásica del cubo de Rubik, (3x3x3) no debemos dejar de mencionar a infinitas variaciones que ha tenido a lo largo de la historia, haciendo posible que salieran a la luz modelos que oscilaban entre (2x2x2) y (22x22x22).

¿Qué tiene que ver el Cubo de Rubik con la matemática?

Muchos son los que se hacen esta pregunta, pero no son capaces de auto-respondérsela a pesar de ser una cuestión más que obvia. Empecemos por hacer un análisis sencillo para entrar en calor e ir adentrándonos un poco más en la funcionalidad de este juguete. Hagamos un cálculo sencillo para medir cuántas permutaciones y posibilidades tenemos para armar el cubo.



Tomemos como referencia el modelo clásico (3x3x3). Este modelo tiene en total ocho vértices y doce aristas, dándonos como resultado una cantidad de 40320 formas de combinar los vértices. En total, siete de los vértices pueden tener una orientación totalmente independiente y la octava dependerá plenamente de las siete anteriores, dándonos a su vez un total de 2187 formas. Las aristas pueden disponerse de 239 500 800 formas. Once de las aristas pueden moverse de forma independiente y solo la duodécima dependerá de las anteriores, ofreciéndonos un total de 2048 formas. Haciendo un cálculo lento pero constante, nos quedaría que el total de permutaciones que se pueden hacer con el **Cubo de Rubik** es de 43 252 003 274 489 856 000 formas. Es decir, cuarenta y tres trillones doscientos cincuenta y dos mil tres billones doscientos setenta y cuatro mil cuatrocientos ochenta y nueve millones ochocientos cincuenta y seis mil permutaciones.

El Cubo de Rubik también ha sido usado innumerables veces como método en la formación de algoritmos. Un **algoritmo** es un conjunto

preescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos. Ha habido miles de personas en el mundo que han inventado sus propios métodos para resolver el **Cubo de Rubik**, los cuales emplean cada uno un algoritmo diferente que los lleva a una solución cada vez más cercana. Algunos algoritmos consisten en la simpleza de armar una pequeña porción del cubo sin desarmar el resto que ya debe estarlo, de esta manera se puede aplicar sucesivamente para el resto de las caras. Como ejemplo tenemos a varios algoritmos que nos permiten alternar tres vértices o cambiar solamente dos de ellos sin romper la estructura del cubo.

David Singmaster[xxxii] fue un gran entusiasta de este juguete. Tanto es así que desarrolló una notación (Notación Singmaster) para denotar paulatinamente una secuencia de movimientos. Esta notación tiene como uso la formación de los algoritmos a partir de la simbología usada, la cual es:

- *F (frente): el lado enfrente a la persona*
- *B (atrás): el lado opuesto al frente*
- *U (arriba): el lado encima o en la parte superior del lado frontal*
- *D (abajo): el lado opuesto a la parte superior, debajo del cubo*
- *L (izquierda): el lado directamente a la izquierda del frente*
- *R (derecha): el lado directamente a la derecha del frente*
- *Fw (dos capas frente): el lado enfrente a la persona y la correspondiente capa media*
- *Bw (dos capas atrás): el lado opuesto al frente y la correspondiente capa media*
- *Uw (dos capas arriba): el lado superior y la correspondiente capa media*

- *Dw (dos capas abajo): el lado inferior y la correspondiente capa media*
- *Lw (dos capas izquierda): el lado a la izquierda del frente y la correspondiente capa media*
- *Rw (dos capas derecha): el lado a la derecha del frente y la correspondiente capa media*
- *x (rotar): rotar el cubo entero en R*
- *y (rotar): rotar el cubo entero en U*
- *z (rotar): rotar el cubo entero en F*
- *M (medio): capa interna vertical en sentido "l".*
- *E (ecuador): capa interna horizontal con el giro en sentido "u".*
- *S (posición): capa interna (central) superior movida en sentido "f".*

Esta notación creada por **David Singmaster** ha llevado a la posibilidad de que existan métodos que permiten resolver el cubo en menos de 100 pasos. El mismo Singmaster desarrolló uno de los métodos más eficaces para darle solución al cubo, el cual consiste en hacerlo capa por capa. La primera de todas es la superior, luego la intermedia y por último la inferior. Esto llevó a que se pudiera resolver el rompecabezas en menos de un minuto.

6.2. Torre de Hanói

Este es otro de esos juguetes tan famosos, aunque no tanto como el **Cubo de Rubik**, que ha dejado mucho qué pensar a la hora de analizar su estructura y complejidad. La **Torre de Hanói** fue concebida por el matemático francés **François Édouard Anatole Lucas**[xxxiii]. Su estructura consiste en una tabla de madera en la cual se sitúan tres estacas con cierto índice de separación una de otra, ubicadas de forma lineal. En una de las estacas de la esquina se colocan una cantidad *n* de discos, los cuales van desde abajo hacia arriba decreciendo su tamaño. El objetivo del juego es pasar todos los discos de la primera estaca hasta la tercera, pasándolos entre estas como se prefiera.

Existe una fórmula para determinar la menor cantidad de pasos posibles que se pueden realizar para resolver este problema, y es – 1.

Solamente existen tres reglas que deben cumplirse al pie de la letra para considerar una solución matemática a este problema:

1- Solo tienes derecho a desplazar un disco a la vez.

2- Un disco de determinado tamaño no puede hacer reposo sobre uno más pequeño que este mismo.

3- Únicamente puedes desplazar el disco que se encuentra en la cima de cada montón.

Para el caso de tres discos la menor cantidad de pasos posibles que se pueden realizar para resolver este problema es 2^3-1=7

Curiosas leyendas sobre la Torre de Hanói

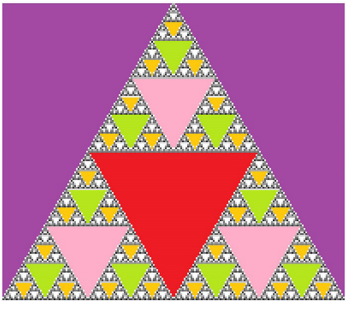
Se cuenta que hace mucho tiempo, en un templo ubicado en India, había una cúpula que se decía que señalaba el centro del mundo. Dentro de esta cúpula se encontraba una hermosa bandeja con tres agujas compuestas de diamante. En un día lluvioso, un rey mandó a colocar 64 discos de oro sobre la primera aguja, oreándolos por tamaño. El más grande de todos iría en el fondo y el más pequeño estaría en la cima. El rey había dado una orden muy sencilla a los sacerdotes de dicha cúpula: “El sacerdote de turno solamente tiene derecho a mover un disco a la vez. Pero no puede dejarlo sobre uno de menor tamaño”. Supuestamente, el pasar de lo días fue haciendo que los sacerdotes intentaran colocar todo el bulto de discos en la aguja del otro extremo.

Otra leyenda cuenta que no fue un rey quien proclamó la orden de realizar ese juego, sino que en los inicios de la creación Dios había concebido una bandeja de plata con tres agujas de diamante y 64 discos de oro. Dios también había dado lugar a un monasterio de monjes al cual se le había asignado la difícil tarea de darle solución al problema. El resultado de pasar los discos de una aguja a otra traería consigo el fin del mundo.

Como es evidente, ninguna de estas leyendas es cierta, sino que fueron solamente un método del mismo **François Édouard Anatole Lucas** para promocionar su juego. Por esta época era muy normal que los matemáticos intentaran ganarse la vida de una forma itinerante con los juegos que ellos mismos inventaban. Además, si fuese cierta esta última leyenda, entonces ¿Cuándo sería precisamente el fin del mundo?

Habíamos mencionado antes que la fórmula para encontrar la menor cantidad de pasos a este problema es $2^n - 1$. Si ajustamos los valores del problema plantado por la leyenda nos quedaría de esta forma $2^{64} - 1$. Digamos que cada monje había sido capaz de trasladar un disco por segundo y colocándolos de tal manera que ningún movimiento fuera erróneo (Cabe aclarar que si tenemos 64 discos es más fácil equivocarse a la hora de medir los tamaños, ya que estos con respecto a su consecutivo solo tienen unos milímetros de diferencia. Esto puede traer como consecuencia romper una de las reglas fundamentales del juego) tardarían exactamente 18446744073709551615 segundos, lo que equivale a 213503982334601.29 días. Puede que les parezca poco, pero esa cantidad sería poco menos de 585 mil millones de años. Un poco exagerado ¿no? Haciendo otros cálculos sabemos que nuestra Tierra tiene apenas 5 mil millones de años y el Universo 14 mil millones de años. Solamente representan una ínfima parte de lo que esa cifra resulta ser.

La recursividad como método para resolver la Torre de Hanói



Si usted no tiene idea de qué es la recursividad, no importa, nosotros se la explicaremos, para ello, le mostramos la siguiente figura:

En ella puede observar que:

1. Hay un “gran triángulo equilátero exterior”, dentro del cual se ha dibujado “un triángulo equilátero rojo” que une sus puntos medio.
2. El “gran triángulo equilátero exterior” ha quedado dividido en tres triángulos más pequeños similares al “gran triángulo equilátero exterior” pero con “un triángulo equilátero rosado” que también une los puntos medios de cada triángulo obtenido en la división anterior.
3. De cada triángulo se han obtenido otros tres, que los “triángulos verdes” permiten obtener tres nuevos triángulos y así sucesivamente.

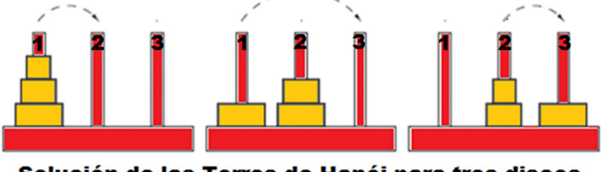
Formalizando lo observado, **la recurrencia, recursión o recursividad es la forma en la cual se especifica un proceso basado en su propia definición**. En el caso presentado la definición utilizada es la de un triángulo equilátero que tiene en su interior otro triángulo que une sus puntos medios.

Siendo más precisos, se trata de un problema que pueda ser definido en función de su tamaño, sea este N, pueda ser dividido en instancias más pequeñas (< N) del mismo problema y se conozca la solución explícita a las instancias más simples, lo que se conoce como casos base, se puede aplicar la misma solución sobre las llamadas más pequeñas y suponer que estas quedan resueltas.

Para el caso de las Torres de Hanói se tiene:

1. Si sólo existe un disco, basta moverlo al poste deseado.

Si tenemos n > 1 discos en el poste 1, como en la figura primero llamamos de manera recursiva a nuestro algoritmo, para mover los n - 1 discos superiores al poste 2. Durante estos movimientos, el disco inferior en el poste 1 permanece fijo. A continuación, movemos el disco restante del poste 1 al poste 3. Por último, de nuevo llamamos de manera recursiva a nuestro algoritmo para mover los n - 1 discos del poste 2 al poste 3. Con esto hemos podido mover n discos del poste 1 al poste 3.



Solución de las Torres de Hanói para tres discos

Si n>1, resolvemos dos veces el problema con (n-1) discos y movemos de manera explícita (evidente, manifiesta) un disco. Por tanto, una expresión matemática del proceso desarrollado es la siguiente:

$$c_1=1 \text{ (condición inicial)}$$

$$c_n=2c_{n-1}+1, \text{para los casos en que } n>1$$

Computacionalmente el algoritmo es el siguiente:

Entrada: N_discos, Palo_inicial, Palo_final

Algoritmo HANOI

Procedimiento H(n, r, s) {Mueve n discos del palo r al s}

Si n=1 entonces mueve un disco de r a s.

Si no hacer H(n-1, r, t) {t es el palo que no es ni r ni s}

Mueve un disco de r a s {solo queda el de debajo de todos}

H(n-1, t, s)

H(N_discos, Palo_inicial, Palo_final) {Llamada principal

Salida: Los movimientos que se van haciendo

Método Iterativo si se quiere prescindir del método de recursividad

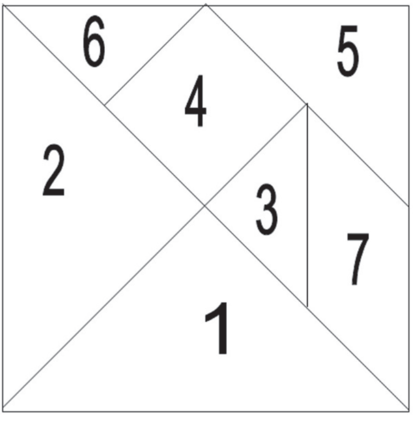
Este método plantea que el disco más importante de todos es el más pequeño, el cual debe ser movido en los pasos impares, mientras que en los pares solo nos limitamos a hacer un movimiento que no lo incluya. Este método también funciona para encontrar la solución con la menor cantidad de pasos posibles. Ese recurso nos hace plantearnos la única cuestión de a cuál de las estacas debemos mover el disco pequeño. También debemos tener muy en cuenta si la cantidad de discos que se nos entregan son par o impar. Los pasos a realizar son:

-Si la cantidad disponible de discos es impar, entonces el primer movimiento del disco pequeño debe ser hacia la tercera estaca. Los siguientes pasos siempre serían de moverlo hacia la fila de su derecha, o hacia la primera en el caso de encontrarse en la tercera.

-En el caso de tener una cantidad par de discos, se procede a colocar el disco más pequeño en la segunda estaca y en los siguientes pasos impares se moverá a la fila de su derecha, o a la primera si está en la tercera.

6.3. El tangram

Este juguete probablemente sea uno de los más empleados en las escuelas, sobre todo con los niños más pequeños, debido a su fuerte capacidad de impulsar el desarrollo imaginativo del individuo. El **Tangram**, que significa "siete tableros de astucia", es un juguete inventado en China que consiste en formar determinadas figuras coherentes (un perro, un gato, un hombre) usando las siete piezas que se nos ofrecen, pero sin superponerlas una con otra.



Las siete piezas que conforman a este rompecabezas se les llama "Tan" y son:

>5 triángulos - Dos grandes, uno mediano y dos pequeños

>1 cuadrado

>1 paralelogramo

Ya se ha mencionado antes un posible significado del nombre de este juguete, sin embargo, existen afirmaciones de que no fue un chino el que bautizó al juego como **Tangram**, sino un inglés. Supuestamente había unido los vocablos "tang", que significa "chino", y "grama", que significa gráfico. Otras suposiciones acerca del nombre de este juego derivan de su posible año de creación, (entre 618 y 907 después de Cristo) época en la que dominaba la dinastía Tang.

Posibles hechos que llevaron a la creación del Tangram

El primer posible evento que llevó a la creación de este juego se remonta a la época en que dominaba la dinastía Song. Supuestamente existía un juego de muebles que estaba compuesto por seis mesas rectangulares. Más adelante se le fueron incorporando nuevos elementos como una mesa triangular. Las familias se disponían a formar con los muebles distintas figuras que supuestamente le daban un toque más acogedor a la morada. Años después se le agregaron más muebles con distintas formas hasta que la idea se popularizó tanto que decidieron sacarlo como juego.

Otra leyenda cuenta que había una vez un emperador chino que le había ordenado a uno de sus sirvientes que le trajera un hermoso y frágil mosaico de cerámica. El sirviente tropezó y rompió la delicada figura que portaba. Ante la desesperación de poder hacer enfadar a su señor, el sirviente intentó armar el mosaico intentando formar un cuadrado. No pudo lograrlo, pero fue capaz de darse cuenta de que podía formar miles de figuras interesantes.

En realidad, no existe una confirmación verídica que sea capaz de afirmar con absoluta certeza cuándo o dónde es que se originó el **Tangram**. Esto se debe a que las publicaciones más antiguas que se han registrado sobre este juego tratan de China en el siglo XVIII, época en la que ya se dudaba con totalidad sobre quién le había dado nacimiento a dicho juego.

Un dato curioso acerca de este juego es que el conquistador **Napoleón Bonaparte**[xxxiv] había desarrollado una afición innata sobre este juego, convirtiéndolo en una parte importante de sí mismo mientras estaba en la isla de Santa Elena a causa de un exilio.

¿Qué contenidos de matemática se pueden aprender con el Tangram?

Además de las habilidades manuales que permitan relacionar la matemática con la realidad objetiva es posible:

Reconocer y dar nombre a las figuras geométricas de dos dimensiones

Comprender los nombres de las figuras básicas

Describir la longitud y anchura de las figuras

Comparar diferentes figuras bidimensionales

Entender la simetría en las formas

Aprender los ángulos de 90 y 45 grados

Pintar y construir figuras geométricas

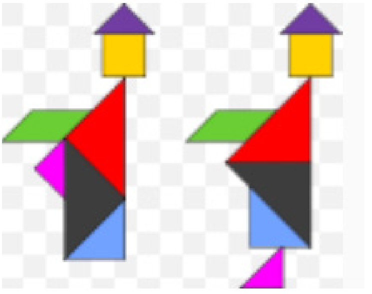
Analizar las características del cuadrado, paralelogramo y triángulo recto

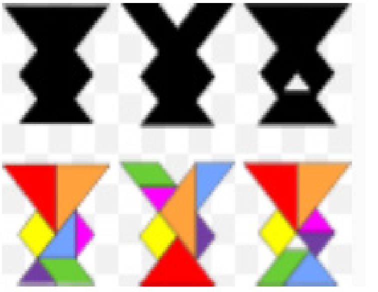
Sumar los ángulos de un triángulo y un rectángulo

El Tangram y las paradojas

Estos dos elementos se han tomado de las manos debido a su fácil análisis, pero difícil explicación lógica. Las paradojas en un **Tangram** se generan a partir de formar determinada figura y luego hacer otra parecida solamente cambiando algunas de las piezas anteriores de posición. Lo curioso de todo esto es que la segunda figura siempre parece carecer de algo que tenía la primera.

Dos de los casos más famosos de estas paradojas son la de los dos monjes y la de las tres copas. Los dos monjes consisten en la formación de una silueta a la cual le alteramos en una segunda formación el orden de las piezas, dando como resultado que al segundo monje parezca que le falte una pierna. La paradoja de las tres copas es exactamente lo mismo, solo que en la formación de la segunda y la tercera siempre aparece un espacio vacío entre ellas.





Siempre es interesante observar cómo la matemática es capaz de operar en temas que a primera vista parecen tan distantes de esta ciencia. En este capítulo hemos abordado la estrecha relación que tienen los rompecabezas mecánicos y la querida ciencia que es protagonista de este libro. Ahora los quiero convocar a todos a que tomen la iniciativa de tener dichos juguetes y realizar vuestros propios planteamientos y análisis sobre ellos. Recuerden que, aunque un juguete sea para niños, eso no quiere decir que no estimule la capacidad de razonar a velocidades mayores.

Capítulo VII. ¿PI-ensa usted que…?

“Grande, todopoderosa, todoperfeccionadora y divina es la fuerza del número, comienzo y regidor de la vida divina y humana, participante de todo. Sin el número todo es confuso y oscuro”.

Filolao

7.1. Surgimiento del número PI

Si de números fuésemos a hablar y los comparásemos con jugadores de futbol, entonces podríamos a atrevernos a decir que le número **PI** fuera el **Leonel Messi**, **Cristiano Ronaldo** o **Maradona** de los números. Si fuésemos a compararlos con profetas bíblicos podríamos decir que **PI** es **Moisés** o **Salomón**. Todos en algún momento de nuestras vidas hemos escuchado innumerables veces la aparición de este número, pero no sabemos con exactitud de dónde proviene o cuáles son sus usos para la vida. Por lo general, el concepto más general que tenemos de dicho número es que equivale a 3,14159…, a veces nuestro conocimiento acerca de este número no llega a rebasar el valor que se le asigna. En este capítulo se les explicará de forma sencilla y breve cuál ha sido el ciclo por el que **PI** ha tenido que someterse para alcanzar ese grado de “fama” que posee. Se les dará respuesta a preguntas como ¿Qué pasó con **PI** y los babilonios? ¿Qué pasó con **PI** y los egipcios? ¿Qué pasó con **PI** y la Biblia?

¿Cómo notaron que PI existía y cuáles fueron los pasajes históricos que lo rodearon**?**

No se sabe con absoluta exactitud quién fue la persona capaz de notar semejante detalle, pero **PI** es la estrecha relación que existe entre el perímetro de la circunferencia y el diámetro de esta. Aunque cueste creerlo, si tomamos varias veces el diámetro de una circunferencia, no importa cuál sea su tamaño, podemos ver que su longitud es equivalente a tres veces ese diámetro y “un poquito más”. Desde que esta cuestión comenzó a plantearse, muchos matemáticos querían saber ¿cuánto era ese “poquito más?

Los babilonios pensaban que el valor de “ese poquito” era igual a **1/8**, en otras palabras, **0,125 (PI = 3,125)**. Para los egipcios fue muy distinto, ellos pensaban que ese excedente equivalía a **256/81**, lo que para ellos significaba que su **PI** era igual a **3,1604**.

7.2. PI y la Biblia

Los babilonios y los egipcios no fueron los únicos que reflejaron cierta obsesión con el número **PI**, sino que la misma Biblia refleja sus propias acepciones sobre este número.

Si vamos al libro de **I Reyes**, capítulo 7, versículos del 23 al 24 (Pasaje de: **Mobiliario del Templo**), podemos ver un claro ejemplo del uso que se le daba a **PI**. (Traducción al castellano de la versión de 1960, Reina Valera)

> *23-Hizo fundir asimismo un mar de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo; su altura era de cinco codos, y lo ceñía alrededor de un cordón de treinta codos.*
>
> *24-Y rodeaban aquel mar por debajo de su borde alrededor de unas bolas como calabazas, diez en cada codo, que ceñían el mar alrededor de dos filas, las cuales habían sido fundidas cuando el mar fue fundido.* **(I Reyes 7:23-24)**

La segunda referencia sobre **PI** que aparece en la Biblia lo refleja el libro II Crónicas, capítulo 4, versículo 2 (Pasaje de: **Mobiliario del Templo**). Este pasaje se refiere a la construcción del **Gran Templo de Salomón**, a 950 años antes de Cristo.

> *2-También hizo un mar de fundición, el cual tenía diez codos de un borde al otro, enteramente redondo; su altura era de cinco codos, y un cordón de treinta codos de largo lo ceñía alrededor.* **(II Crónicas 4:2)**

Vemos constantemente que la unidad de medición usada en aquellos tiempos eran los **codos**[xxxv], la cual tiene determinadas longitudes dependiendo del lugar en el que se usaban. Algunas de esas longitudes son: **Egipto: 0,45 m**, **Mesopotamia: 0,533 m**, **Imperio persa: 0,500 m**. Fueron muchas las civilizaciones que usaron esta medida y todas tenían valores parecidos, pero no iguales. Esto probablemente pueda derivar en la confusión de cuál era el verdadero valor de **PI** que ofrece la Biblia, pero les quiero aclararles que este número no depende de valores, sino de una relación que existe entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro. Tomando la medición de los codos descritas en los versículos y los comparamos, podemos ver que su concepción de **PI** era solamente de 3 unidades, sin incluir ese “poquito más”. No se sabe a ciencia cierta si es que no tenían en cuenta ese excedente, o si lo notaban, pero no daban importancia, o si pensaban que era tan pequeño que su valor era prácticamente despreciable. Lo que sí sabemos es que en libros tan antiguos como la Biblia podemos apreciar una potenciada inclinación hacia este número tan enigmático.

Llevando a una notación contemporánea las antiguas notaciones se tiene:

- Egipto


Papiro de Ahmes o Papiro Rhind

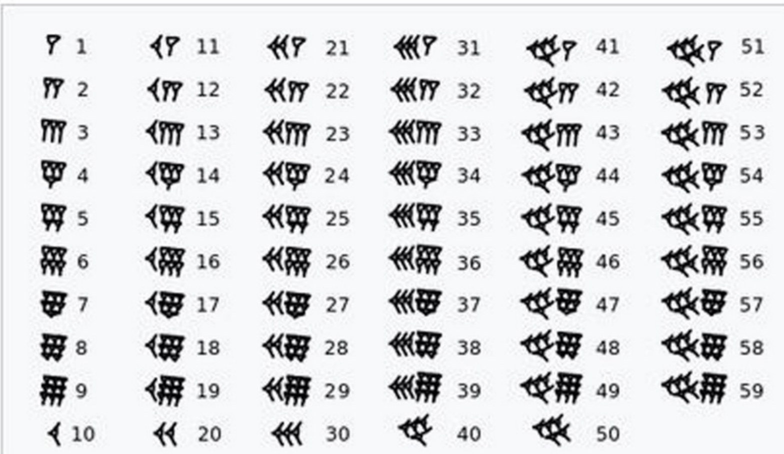
En el Papiro de Ahmes o Papiro Matemático Rhind[xxxvi] se presenta un problema en el que se utiliza un valor aproximado de PI.

Según el matemático y astrónomo austriaco-estadounidense Otto Neugebauer[xxxvii], el valor de π en el referido papiro se calcula mediante la aproximación del área de un cuadrado de lado 8, a la de un círculo de diámetro 9.

$$S = \pi r^2 \cong \left(\frac{8}{9} \times d\right)^2 = \frac{64}{81} d^2 = \frac{64}{81}(4r^2)$$

$$\pi \cong \frac{256}{81} = 3{,}16049 \ldots$$

- Mesopotamia



Sistema de numeración mesopotámica

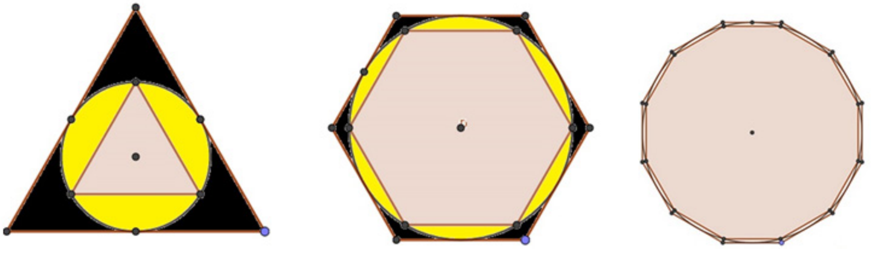
Hacia el 1900-1600 a. C., los matemáticos utilizaron un sistema de base 60 escritos en tablillas de barro en forma de cuñas y emplearon para PI el siguiente valor:

7.3 ¿Quién logró la primera aproximación de PI?

El hombre que logró hacer un cálculo aproximado de **PI**, o por lo menos el primero que se conoce hasta la actualidad, es el famoso matemático griego **Arquímedes de Siracusa**. Los griegos se plantearon uno de los problemas más famosos de la historia de la matemática, el de la “cuadratura del círculo”.

La necesidad es “cuadrar el círculo” viene de los orígenes de la geometría, el de medir superficies en el antiguo Egipto; mientras estas figuras estaban limitas por líneas rectas el problema era relativamente sencillo, pero cuando los matemáticos se enfrentaron a figuras curvas trataron de reducir el problema a calcular el área de un cuadrado que equivaliera a la del círculo, pero esto resultó imposible y uno de los causantes de ese imposible fue precisamente π por tratarse de un número irracional, que al expresarse como un número racional resulta un número de infinita cifras no periódicas y por tanto al expresarse en forma racional siempre resultaba un número aproximado.

Por lo expresado, es que el planteamiento de Arquímedes para calcular PI era un proceso de aproximación al de inscribir polígonos regulares de cierta cantidad de lados en las circunferencias y luego calculando su perímetro y su relación con el área. Primero probó para un pentágono, luego para un hexágono y más tarde duplicó los lados de esos polígonos de manera sucesiva como se muestra en la figura.



En este caso se nota que la diferencia entre las áreas tanto de los polígonos circunscritos e inscritos y el círculo va disminuyendo en la medida en que se duplican los lados del polígono.

Arquímedes no calculó **PI**, es decir, no dio un valor para este número, pero expresó que , de modo que lo hizo a través de un error y dicho error él era capaz de estimarlo y calcular. Eso es lo que hace tan grande y notable al trabajo de **Arquímedes** con respecto a **PI**. Fue capaz de darse cuenta que **PI** era posible calcularlo hasta un determinado número de cifras decimales infinitas, pero estaba cometiendo un error.

Aproximaciones chinas del número π	
$\pi \approx \sqrt{10} = 3{,}162277$	 Astrónomo Zhang Heng (78-139)
$\pi \approx \frac{142}{45} = 3{,}15555$	Astrónomo Wang Fang. Finales del siglo II. No se tiene información del método empleado
$\pi \approx 3{,}14159$	Liu Hui (225-295) matemático chino que vivió en el reino Wei en el año 263 editó un libro ***Los nueve capítulos del arte matemático;*** en estos comentarios Liu presenta una estimación del número π obtenida con un algoritmo que aplica iteradamente, de forma similar a Arquímedes, considerando un polígono de 192 lados.
$3{,}1415926 \leq \pi \leq 3{,}1415927$	 Zu Chongzhi. Astrónomo y matemático, siglo V; dio además dos aproximaciones racionales de $\pi \approx \frac{22}{7}$ y $\pi \approx \frac{355}{113}$ siendo la última aproximación tan buena y precisa que no fue igualada hasta más de nueve siglos después, en el siglo XV.
Aproximaciones hindúes del número	
$\pi \approx 3{,}1416$	 Aryabhata o Aryabhata I(hacia 476-550) fue el primer gran matemático y astrónomo de la era clásica de la matemática y la astronomía en la India.

π≈3,14159265359	Hacia 1400 Madhava obtiene una aproximación exacta hasta 11 dígitos siendo el primero en emplear series para realizar la estimación. Madhava fue fundador de la Escuela de Kerala, y es considerado el padre del análisis matemático, por haber dado el paso decisivo desde los procedimientos finitos de los matemáticos antiguos, hacia el concepto de infinito -a través del concepto de límite-, núcleo del análisis moderno clásico. Él también es reconocido como uno de los más importantes astrónomos durante la Edad Media europea, debido a sus importantes contribuciones en los campos de series infinitas, cálculo y trigonometría.
Aproximaciones islámicas del número	
"El hombre práctico usa 22/7 como valor de π, el geómetra usa 3, y el astrónomo 3,1416".	 Tomado del libro Álgebra (Hisab al yabr ua al muqabala) de Al-Jwarizmi. (c.780-c.835), matemático, biblio tecario en la corte del califa al-Mamun y astrónomo en el observatorio de Bagdad. Sus trabajos de álgebra, aritmética y tablas astronómicas adelantaron enormemente el pensamiento matemático y fue el primero en utilizar la expresión al-ŷabr (de la que procede la palabra álgebra) con objetivos matemáticos. Introdujo el método de cálculo con la utilización de la numeración arábiga y la notación decimal.
π≈3,1415926535897932	Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi (1380-1429), conocido también como Ghiyath al-Kashi, Jamshīd al-Kāshī o simplemente Al Kashi fue un astrónomo y matemático persa. Fue llamado también el "segundo Ptolomeo". En julio de 1424 elaboró un tratado sobre la circunferencia, donde calculó el número pi con dieciséis posiciones decimales. Esta cifra no fue nunca antes calculada con tanta precisión.

7.4. Calculando los decimales de PI

Un el siglo XVIII después de Cristo, el matemático alemán **Johann Heinrich Lambert**[xxxviii], logró demostrar la irracionalidad de **PI**. Esto quiere decir que no se puede conseguir el resultado de ese número como cociente de dos números enteros. Esto hace que se desate una fiebre por **PI** a lo largo y ancho de todo el mundo. Los investigadores querían calcular cada vez con más afán más y más decimales de **PI**. La primera cantidad considerable de decimales calculados para este número fue de 35 decimales, casi cien años después se lograron calcular 41 decimales, para finales del siglo XIX ya se habían calculado 140 decimales. Esta obsesión por calcular decimales de **PI** hizo que matemático amateur como **William Shanks** fueran capaces de hacer sus propios cálculos. Este matemático inglés fue capaz de calcular un total de 707 decimales del número **PI** utilizando la fórmula $\frac{\pi}{4} = 4arctan\left(\frac{1}{5}\right) - arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ Desgraciadamente, al pobre **William** le tomó veinte años de su vida hacer dicha demostración. Como la vida es injusta y cruel, 71 años después se demostró que dicho cálculo contenía un error muy grande. El error fue encontrado por **Ferguson** en 1944 y enunció que de los 707 decimales, solo los primeros 527 eran correctos.

Gracias al avance tecnológico, pudimos concebir inventos tan potentes como la calculadora y posteriormente la creación de los ordenadores; así, el resultado del trabajo de 20 años de William Shanks, hoy puede ser superado con una simple instrucción en el software Mathematica: N[Pi,750]

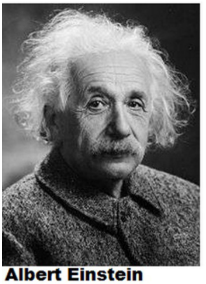
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459
2307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844
6095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489
5493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564
8566923460348610454326648213393607260249141273724587006606315588
1748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213
84146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105118
54807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244
065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675
238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363
717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611
212902196086403441815981362977477130996

Gracias a estas invenciones el hombre pudo conocer el primer millón de decimales que contenía **PI** en su interior. Pero esa cantidad solamente quedaría como un recién nacido si lo comparásemos con el valor alcanzado en el año 2004, tardándose para encontrar los decimales un total de 500 horas. Podría parecer mucho tiempo, pero es relativamente nada si lo comparamos con la cantidad de años que se tardaron en encontrar unos pocos decimales. El cálculo llevó a la humanidad a concebir la cantidad más grande registrada hasta la fecha y consta de 1350 billones de decimales.

7.5. Una curiosidad sobre PI

Monumento a π en Cúcuta, Colombia.

La comunidad ha considerado al 14 de marzo como el **Día PI**. Esto se debe a que si tomamos el método de ubicar la fecha en Estados Unidos (colocando primero el mes y luego el día) tenemos que marzo es el tercer mes del año y colocándole el día catorce tenemos a este singular número aplicado en nuestras vidas. De esta forma se ha podido concebir una gran coincidencia y es que el físico alemán **Albert Einstein** nació ese mismo día. Podría parecer simple coincidencia, pero qué les parece si les digo que el físico británico **Stephen Hawking** falleció en ese día. No parece simple coincidencia que los dos físicos más grandes de la historia hayan visto su muerte y su natalicio en el mismo día, pero de diferentes años. ¿Qué nos querrá decir Dios con todo esto?



Albert Einstein
Nacimiento: 3-14-1879
Fallecimiento: 4-18-1955

Stephen Hawking
Nacimiento: 1-8-1942
Fallecimiento: 3-14-2018

7.6. Otros acontecimientos importantes para la ciencia ocurridos el día PI

- 14 de marzo de1994, salió Linux 1.0.0, que constaba de 176.250 líneas de código.

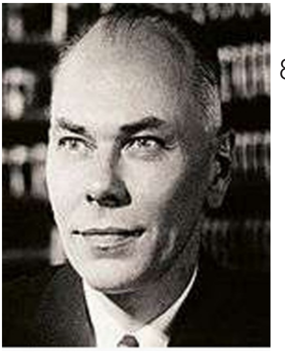
Nacieron:

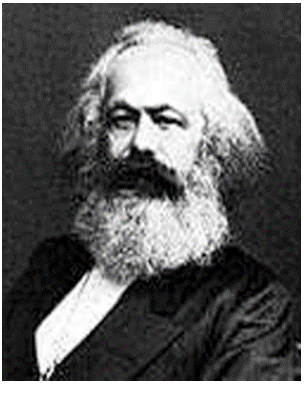
- **Pieter van Musschenbroek** (Leiden, 14 de marzo de 1692 – 19 de septiembre de 1761) médico, y físico neerlandés
- **Giovanni Virginio Schiaparelli** (Savigliano, 14 de marzo de 1835 - Milán, 4 de julio de 1910) astrónomo e historiador de la ciencia italiano.
- **Paul Ehrlich** (Strehlen, Silesia; hoy Strzelin, Polonia; 14 de marzo de 1854 – Hamburgo, Imperio alemán; 20 de agosto de 1915) eminente médico y bacteriólogo alemán, ganador del premio Nobel de Medicina en 1908.
- **Matilde Petra Montoya Lafragua** (Ciudad de México, 14 de marzo de 1859 - id., 26 de enero de 1939) fue la primera mujer mexicana en alcanzar el grado académico de médica, y obtuvo su doctorado en 1887.
- **Vilhelm Friman Koren Bjerknes** (14 de marzo de 1862 - 9 de abril de 1951) físico y meteorólogo noruego, que desarrolló buena parte de las modernas técnicas de predicción meteorológica.
- **Lev Semiónovich Berg** (en ruso: **Лев Семёнович Берг**) geógrafo y biólogo soviético. Nació el 14 de marzo de 1876 en Bender, Moldavia, y murió el 24 de diciembre de 1950 en Leningrado, actual San Petersburgo, Rusia.
- **Wacław Franciszek Sierpiński** (IPA: ˈvatswaf fraɲ ˈtɕiʂɛk ɕɛrˈpʲiɲskʲi, n. 14 de marzo de 1882, Varsovia - m. 21 de octubre de 1969 en Varsovia) matemático polaco. Son notables sus aportaciones a la teoría de conjuntos, la teoría de números, la topología y la teoría de funciones. En la teoría de conjuntos que realizó importantes contribuciones para el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Estudió la teoría de la curva que describe un camino cerrado que

contiene todos los puntos interiores de un cuadrado. Publicó más de 700 trabajos y 50 libros.

- **Frank Frederick Borman II** (n. 14 de marzo de 1928) es un astronauta jubilado de la NASA, comandante del Apolo 8, la primera misión del Programa Apolo que circunnavegó en 1968 alrededor de la Luna, haciendo de él, junto con sus compañeros de tripulación Jim Lovell y William Anders, los primeros de solo 27 hombres que lo han hecho hasta ahora. También fue el principal ejecutivo (CEO) de la línea aérea “Eastern Air Lines”, de 1975 a 1986. Orbitando por primera vez la Luna dijo: “Tuve la enorme sensación de que tenía que haber un poder más grande que cualquier de nosotros: que había un Dios”. Borman, Frank (1968)
- **Eugene Andrew Cernan** (Chicago, Illinois, 14 de marzo de 1934-Houston, Texas, 16 de enero de 2017) fue un astronauta estadounidense de la NASA, tripulante del Gemini 9A en 1966 y de las misiones Apolo 10 en 1969 y comandante del Apolo 17 en 1972, además de oficial de la Armada de los Estados Unidos.

Murieron



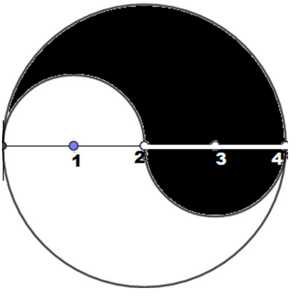
- **Howard H. Aiken** (Hoboken, Nueva Jersey, 8 de marzo de 1900 - San Luis, Misuri, 14 de marzo de 1973), ingeniero estadounidense, pionero en el campo de la informática e ingeniero principal tras el proyecto que dio lugar a la serie de ordenadores Mark.
- 

  Karl Marx (Tréveris, 5 de mayo de 1818-Londres, 14 de marzo de 1883) filósofo, economista, periodista, intelectual y militante comunista prusiano de origen judío. En su vasta e influyente obra, abarca diferentes campos del pensamiento en la filosofía, la historia, la ciencia política, la sociología y la economía; aunque no limitó su trabajo solamente a la investigación, pues además incursionó en la práctica del periodismo y la política, proponiendo siempre en su pensamiento una unión entre teoría y práctica. Junto a Friedrich Engels, es el padre del socialismo científico, del comunismo moderno, del marxismo y del materialismo histórico. Sus escritos más conocidos son el *Manifiesto del Partido Comunista* (en coautoría con Engels) y *El Capital*.

- **William Alfred "Willie" Fowler** (Pittsburgh, EUA, 9 de agosto de 1911 - Pasadena, 14 de marzo de 1995) físico estadounidense galardonado con el Premio Nobel de Física en 1983.

7.7. El "Yin y Yang"

En la figura se muestra el símbolo de la filosofía china antigua "Yin y Yang", el cual plasma la unidad de dos principios antagónicos: el día y la noche, lo femenino y lo masculino, el bien y el mal. El contorno del arco interior de este símbolo está formado por dos semicircunferencias cuyos radios son dos veces menores que el radio del círculo grande, los centros de las cuales, junto con el centro del círculo grande, están dispuestos sobre un diámetro al que dividen en cuatro partes iguales.

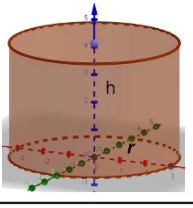
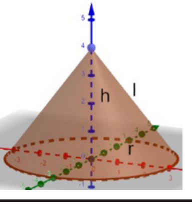
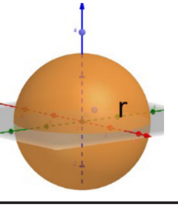


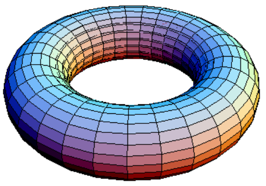
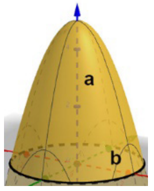
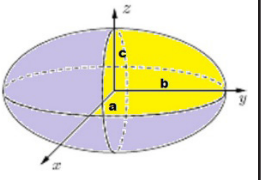
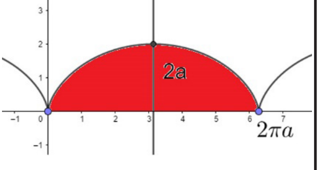
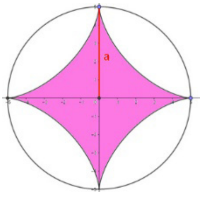
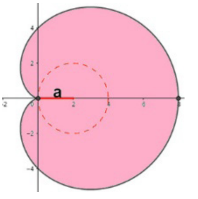
No es difícil calcular que la longitud de este arco con "forma de zigzag" en el interior del círculo es igual a la mitad de la longitud de la circunferencia grande.

7.8. El número PI en las matemáticas

En la geometría:

Indudablemente que el número está relacionado con la circunferencia, pero existen fórmulas relacionadas con otros cuerpos y figuras planas como se muestra en la siguiente tabla:

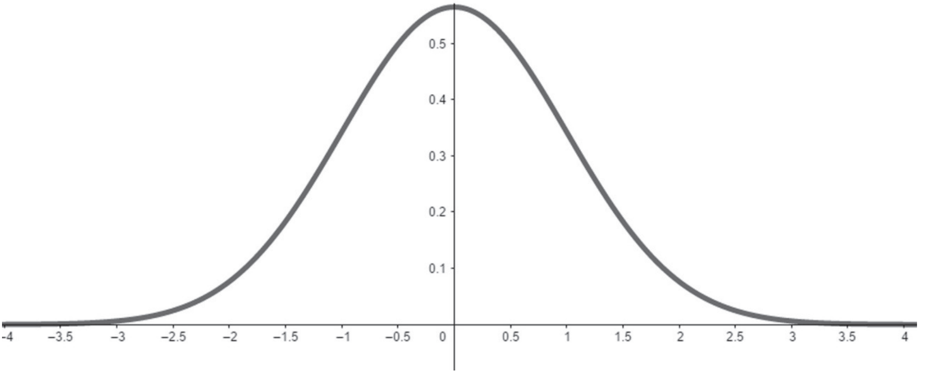
		

Cilindro Volumen: $\pi r^2 h$ Área de la superficie lateral: $2\pi rh$	**Cono** Volumen: $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ Área de la superficie lateral: $\pi r\sqrt{(r^2+h^2)}=\pi rl$	**Esfera** Volumen: $\frac{4}{3}\pi r^3$ Área de la superficie: $4\pi r^2$
		
Toro Radio interior: a Radio exterior: b Volumen: $\frac{1}{4}\pi^2(a+b)(b-a)^2$ Área de la superficie: $\pi^2(b^2-a^2)$	**Paraboloide de revolución** Volumen: $\frac{1}{2}\pi b^2 a$	**Elipsoide** Volumen: $\frac{4}{3}\pi abc$
		
Cicloide Área comprendida por el arco: $3\pi a^2$	**Hipocicloide** Área encerrada por la curva: $\frac{3}{8}\pi a^2$	**Cardiode** Área encerrada por la curva: $\frac{3}{2}\pi a^2$

Probabilidades

Las probabilidades siempre han sido un tema de qué hablar en el ámbito matemático. Son muchos los que cuestionan y estudian las distintas maneras en las que determinado evento es capaz de darse en la vida. El número **PI** también se inmiscuye en esta rama de la matemática. Datos sobre la relación de estos dos elementos pueden ser:

1. En la teoría de la probabilidad, la función de densidad de probabilidad, función de densidad, o, simplemente, densidad de una variable aleatoria continua describe la probabilidad relativa según la cual dicha variable aleatoria tomará determinado valor según la función $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ cuya representación gráfica se adjunta.



2. La probabilidad de que la variable aleatoria caiga en una región específica del espacio de posibilidades estará dada por la integral de la densidad de esta variable entre uno y otro límite de dicha región.

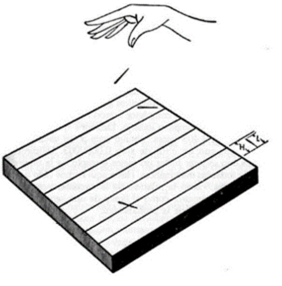
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

La campana de Gauss permite conocer la probabilidad de un cierto suceso en el caso de una población cuyo comportamiento estadístico siga un patrón normal, con media μ y varianza σ.

1. Existe la probabilidad de que al escoger de manera aleatoria dos números enteros y que estos sean primos entre sí sea de $6/\pi^2$.
2. La probabilidad que existe de elegir dos números enteros menores a 1 y junto a este mismo formen los lados de un triángulo obtusángulo es de $(\pi-2)/4$

3. La cantidad media de formas de escribir un número entero positivo como suma de dos cuadrados perfectos es de $\pi/4$, siendo su orden relevante.

La Aguja de Buffon



La Aguja de Buffon consiste en un problema muy clásico que nos permite encontrar el valor de **PI** a través de la probabilidad. Este problema fue planteado en 1733 por el matemático **Georges Louis Leclerc, conde de Buffon**[xxxix] y resuelto por él mismo en 1757. El problema consiste en lanzar una aguja una cantidad de veces igual a ***n*** sobre un papel al cual se le hayan trazado líneas paralelas con una distancia uniforme entre ellas. Es posible demostrar que, si la distancia entre las rectas es igual a la longitud de la aguja, entonces la probabilidad de que esta caiga sobre una línea es igual a **PI**. La diferencia entre la longitud de una recta a otra y la de la aguja puede variar el resultado. Si la aguja es más pequeña que la distancia entre las rectas, entonces las probabilidades son menores y si es lo contrario, entonces el resultado tiende a complicarse a niveles astronómicos. La solución para este problema quedó trazada de la siguiente forma:

(Cantidad de Tiros / Cantidad de Cruces) x 2 ≈ π

Lo bueno de este experimento es que cualquiera puede repetir el proceso tantas veces le hagan falta. Mientras más lanzamientos se hagan se alcanzará una mejor aproximación deseada.

Análisis matemático

En Análisis matemático el número **PI** aparece innumerables veces en fórmulas elaboradas por afamados matemáticos:

1. Francisco Vieta[xl] en el siglo XVI

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \ldots}$$

2. Fórmula de **Leibniz** para el cálculo de **PI**:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots = \pi/4$$

3. Producto de Wallis[xli] para representar el valor de PI:

$$\pi = 2\frac{2\times 2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8}{1\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9}\cdots$$

4. Ecuación de **Euler**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!^2}{(2n+1)!} = 1 + 1/3 + \frac{1\ x\ 2}{3\ x\ 5} + \frac{1x2x3}{3x5x7} + \ldots = \pi/2$$

5. Desarrollo de **PI** en series:

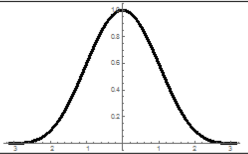
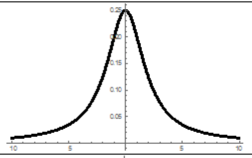
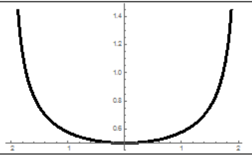
$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k 3^{\frac{1}{2}-k}}{2k+1}$$

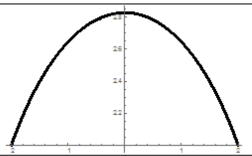
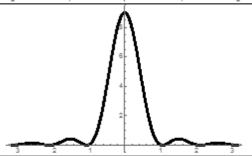
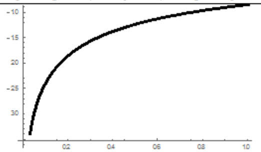
6. Formas que representan una aproximación de **PI**:

$$\sqrt[29]{261424513284461} \approx \pi$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{9}{6 + \cfrac{25}{6 + \cfrac{49}{6 + \cfrac{81}{6 + \cfrac{121}{\cdots}}}}}}$$

Interesante resulta también el cálculo de integrales cuyos resultados están relacionados con como se muestra en la siguiente tabla:

$f(x)=\frac{(sen(x))^3}{x^3}$		$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\mathrm{Sin}[x])^3}{x^3}dx=\frac{3\pi}{4}$
$f(x)=\frac{1}{x^2+4}$		$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{\pi}{2}$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$		$\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\pi$

$f(x)=\sqrt{8-x^2}$		$\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx=2(2+\pi)$
$f(x)=\frac{(\mathrm{Sin}[3x])^2}{x^2}$		$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\mathrm{Sin}[3x])^2}{x^2}dx=3\pi$
$f(x)=\frac{\mathrm{Log}[x]}{1-x}$		$\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{Log}[x]}{1-x}dx=-\frac{\pi^2}{6}$

Capítulo VIII. ¿De cuántas formas se puede hacer?

"Los métodos combinatorios son usados para resolver problemas de transporte, problemas sobre confección de horarios, planes de producción y la mecanización de estas, así como para determinar las características genéticas en la obtención de razas de animales en laboratorios".

"La combinatoria es utilizada para confeccionar y descifrar claves, así como para resolver problemas de la teoría de la información. Y también; ¿. por qué no? Para decidir en un futuro no muy lejano la forma más eficaz de conservar la vida en nuestro planeta".

Rolando Reytor Rodríguez

8.1. El problema de Galileo

Cuenta la historia que en cierta ocasión, el gran científico Galileo Galilei[xlii] fue visitado por un amigo que era un apasionado jugador de dados, algo muy común en aquellos tiempo, con el propósito de plantearle este problema:

> ***"Jugando con tres dados, he notado que el número 10, como suma de los puntos en los tres dados, aparece con más frecuencia que el número 9, ¿cómo es esto posible si ambos números se forma de seis maneras diferentes?"***

$NUEVE$	$DIEZ$
$1+2+6=9$	$1+3+6=10$
$1+3+5=9$	$1+4+5=10$
$2+3+4=9$	$2+3+5=10$
$2+2+5=9$	$2+4+4=10$
$1+4+4=9$	$2+2+6=10$
$3+3+3=9$	$3+3+4=10$

Ciertamente, el amigo de Galileo tenía razón, ambos números se expresan de igual cantidad de formas como la suma de 3 dígitos y también, en la práctica se constataba que el diez aparecía con más frecuencia que el nueve.

Al analizar esta contracción, Galileo se dio cuenta que lo importante no era cómo se descomponían ambos números en tres sumandos, sino **CUÁNTAS VARIANTES** hay que conducen a la suma de “nueve” y de “diez”. Vea la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c}
NUEVE \\
1+2+6\begin{Bmatrix}1,2,6 & 1,6,2 & 2,1,6 \\ 2,6,1 & 6,1,2 & 6,2,1\end{Bmatrix}(6formas) \\
1+3+5\{idem\}(6formas) \\
2+3+4\{idem\}(6formas) \\
2+2+5\begin{Bmatrix}2,2,5 \\ 2,5,2 \\ 5,2,2\end{Bmatrix}(3formas) \\
1+4+4\{idem\}(3formas) \\
3+3+3\{3,3,3\} \\
TOTAL: 25\ FORMAS
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
DIEZ \\
1+3+6\begin{Bmatrix}1,3,6 & 1,6,3 & 3,1,6 \\ 3,6,1 & 6,1,3 & 6,3,1\end{Bmatrix}(6formas) \\
1+4+5\{idem\}(6formas) \\
2+3+5\{idem\}(6formas) \\
2+4+4\begin{Bmatrix}2,4,4 \\ 4,2,4 \\ 4,4,2\end{Bmatrix}(3formas) \\
2+2+6\{idem\}(3formas) \\
3+3+4\{idem\}(3formas) \\
TOTAL: 27\ FORMAS
\end{array}$$

La respuesta estaba dada, evidentemente, la probabilidad de que aparezca en tres dados las sumas 9 y 10 es la relación de 25 a 27.

Ahora seguramente que usted dirá: “caramba, es cierto, es un razonamiento **<u>muy fácil</u>**”, pero no lo crea así, baste decirle que el gran Leibniz, el iniciador de Cálculo Diferencial e Integral daba igual probabilidad a que en dos dados apareciera el 11 que el 12. Después del planteamiento de Galileo, se descubrió el error, como ya conoce el razonamiento de Galileo, intente usted descubrir el error de Leibniz.

Si no pudo encontrar el error le damos un nivel de ayuda: con dos dados el 12 se obtiene de una forma única; 6+6=12, pero el 11, se puede obtener por la suma de ____+ ____ y ____+_____, OLVÍDESE

DE LA COMUTATIVIDAD, ya sabemos que 5+6=6+5=11, pero son dos formas de obtener 11 con dos dados.

Siga investigando:

a) ¿De cuántas formas se puede obtener 7 lanzando dos dados?

b) 6 y 8 se obtiene del mismo número de combinaciones con dos dados ¿cuántas son?

c) Si fuera a jugar dados, entre el 7 y el 8 ¿a cuál apostaría?

d) ¿A cuál apostaría entre el 6 y el 8?

Como puede comprobar no da resultado jugar, a la larga siempre pierde, pero si juega, hágalo apostando a la mayor probabilidad.

Volviendo al problema inicial, Galileo dio respuesta científica a una de las primeras preguntas ¿**de cuántas formas**? Dando origen a la Teoría Combinatoria, desde entonces la pregunta se ha repetido infinidad de veces, comience usted a preguntarse, de cuántas formas puede hacer muchas cosas de la vida cotidiana: seleccionar la ropa con la que va a vestir para salir, las elecciones del recorrido del día, la colocación de los adornos en su casa, etc., etc., nosotros trataremos de darle solución a muchas de sus preguntas.

8.2. Teorema fundamental de la Teoría Combinatoria

Observe las banderas de estos tres países:

Colombia

Ecuador

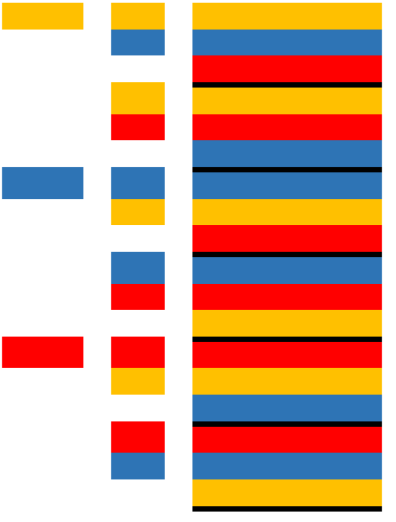
Venezuela

Las banderas de Colombia, Ecuador y Venezuela tienen los mismos colores y en el mismo orden. Ahora observe estas dos banderas:

Cuba

Puerto Rico

Estas banderas tienen los mismos colores, pero en distintas posiciones:



Una pregunta relacionada con esta observación pudiera ser:

¿**De cuántas formas** se puede pintar una bandera de tres franjas utilizando los colores de la bandera ecuatoriana?

Obsérvese que para resolver el problema hay que seguir el siguiente algoritmo:

1. Escoger el primer color. Como se dispone de 3 colores, ese primer color se puede escoger de 3 formas distintas: (amarillo, azul, o rojo)
2. Una vez escogido el primer color, habrá que escoger el segundo color, para lo que quedan 2 posibilidades. Como por cada una de las tres selecciones anteriores, hay dos posibilidades de escoger el segundo color, entonces, escoger el primer y segundo color se puede hacer de 3x2 =6 formas, como se muestra en la tabla.
3. Solo queda seleccionar el tercer color para lo que queda solo un color, por eso el total de banderas posibles a formar con tres colores es 3x2x1=6 banderas que aparen en el esquema.

El algoritmo empleado se puede generalizar y expresarse mediante la regla del producto que se expresa del siguiente modo:

> *Si el objeto A se puede escoger de m maneras y si, después de cada una de estas elecciones, del objeto B se puede escoger de n maneras, la elección del par (A, B) en el orden indicado se puede efectuar de m*n formas.*

Ejemplo de aplicación de esta regla:

> *En una cafetería se ofrecen 3 platos principales (hamburguesa, hamburguesa con queso y filete de pescado) y 4 bebidas diferentes (café, té, refresco, cerveza). ¿De cuántas formas se pueden seleccionar un plato principal y una bebida opcional?*

Respuesta:

Existen 3 formas de seleccionar el plato principal, y por cada una de esas formas hay 5 formas diferentes de seleccionar la bebida opcional (café, té, refresco, cerveza, ninguna).

Por la regla del producto, se puede seleccionar de $3 \times 5 = 15$ formas diferentes.

Esta regla se puede generalizar para n objetos a escoger.

El problema de las banderas se puede esquematizar del siguiente modo:

Designemos los colores por una letra:

A: azul

R: rojo

M: amarillo

Las 6 banderas del esquema anterior se puedo representar del siguiente modo:

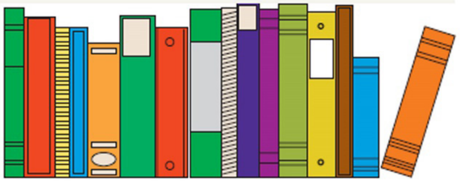
MAR, MRA, AMR, ARM, RMA, RAM

8.3. Permutaciones

En el problema anterior como se tenían sólo 3 colores, bastó intercambiar los lugares para obtener el resultado, en otras palabras, bastó con ***permutar*** los elementos de posición para resolver el problema, por eso se dice que este es un problema que resuelve mediante el ***cálculo de la permutación de n elemento*** mediante la siguiente fórmula: $P_n=n*(n-1)*(n-2)\dots 1$. La expresión anterior se puede simplificar y expresarse del siguiente modo: $P_n=n!$ Donde $n!=n*(n-1)*(n-2)\dots 1$ y se lee factorial de n o n factorial.

Ejemplo:

¿De cuántas formas se pueden organizar en forma alineada los 16 libros que se muestran en la imagen?



Respuesta:

$P_{16}=16!=16\times15\times14\times13\times\ldots\times3\times2\times1=20\ 922\ 789\ 888\ 000$ formas

¡Increíble! Pero si lo duda comience a permutarlos y cuéntelos ¡son solamente 16 libritos!

¿De cuántas formas se pueden organizar si los cuatro libros verdes y los dos azules deben permanecer juntos?

Respuesta:

Los cuatro libros verdes se consideran uno solo a los efectos de permutarse, al igual que los dos libros azules, en ese caso se tendrían 10 objetos a permutar, teniendo el siguiente resultado: $P_{10}=10!=3628800$, pero los cuatro libros verdes se permutan entre si $P_4=4!=24$ y los dos libros azules también se permutan entre sí con $P_2=2!=2$; aplicando a estos tres resultados la fórmula del producto se tiene:

$P_{10}\times P_4\times P_2=10!\times4!\times2!=3628800\times24\times2=174\ 182\ 400$ formas.

Algunas particularidades de las permutaciones:

1. Cuando entre los objetos escogidos para realizar las permutaciones hay cierta cantidad de elementos idénticos,

   Ejemplo:

   ¿De cuántas formas se pueden ordenar las 10 letras que forman la palabra Tungurahua[xliii]?

   La solución se basa en el siguiente teorema:

El número de permutaciones distintas que se pueden formar con m objetos, entre los cuales hay u iguales entre sí, otros v iguales entre sí..., y finalmente, w iguales entre sí, es:

$$P_m^{u,v,\ldots,w}=\frac{m!}{u!\times v!\times\ldots\times w!},u+v+\cdots+w=m$$

Para el caso del problema planteado se tiene:

m= 10

t= 1 (hay 1 t)

u= 3 (hay 3 u)

v= 1 (hay 1 n)

w=1 (hay 1 g)

x=1 (hay 1 r)

y=2 (hay 2 a)

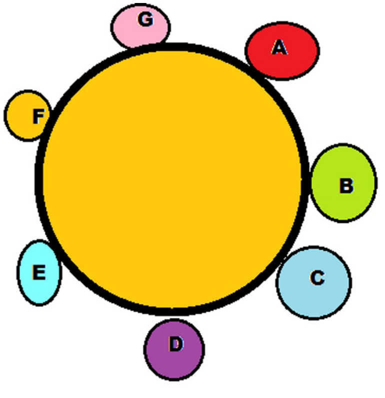
z=1 (hay 1 h)

$$P_m^{1,3,1,1,1,2,1} = \frac{10!}{1! \times 3! \times 1! \times 1! \times 1! \times 2! \times 1!} = 302400,$$

$$1 + 3 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 10$$

2. Permutaciones circulares.

Sea el problema ¿De cuantas formas se pueden sentar 7 personas alrededor de una mesa circular?

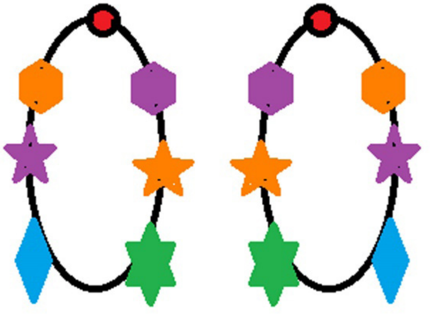


El número de permutaciones de n elementos situados alrededor de un círculo se igual a $P_{c(n)}$=(n-1)!

Para el caso $P_{c(7)}$=(6)!=720

Los caballeros de la Mesa Redonda

El problema de sentarse alrededor de una mesa redonda es real, en la leyenda del rey Arturo se habla de la Mesa Redonda o Tabla Redonda, esta era una mesa mística de Camelot (fortaleza y reino del legendario Rey Arturo) alrededor de la cual el rey y sus caballeros se sentaban para discutir asuntos cruciales para la seguridad del reino. En algunas versiones, el mago Merlín también tenía un asiento.



Plantearemos ahora el siguiente problema, ¿cuántos collares se pueden confeccionar con 7 cuentas diferentes? Por analogía con el problema anterior, usted puede pensar que también se pueden confeccionar 720 collares diferentes, pero en este caso no solo se pueden situar las cuentas en redondo, también es posible voltear el collar como se muestra en la imagen, por lo que este caso, se reduce a la mitad el número de collares, es decir, de todas formas, la posibilidad de confeccionar 360 collares con solamente 7 cuentas, es un número significativo que quizás usted no se hubiera imaginado

8.4. Combinaciones

A diferencia de los problemas anteriores donde interesa el orden en que se colocan o escogen los elementos, en el siguiente problema el orden no interesa.

En la imagen se muestra un aula en la que participan 5 alumnos y 4 alumnas, que para identificarlos se le ha asignado una letra del alfabeto latino. El problema consiste en determinar de cuántas formas se pueden seleccionar tres integrantes de esta aula para que representen al grupo en una reunión de estudiantes.

Llevado al lenguaje de las matemáticas el problema consiste en determinar ¿cuántos subconjuntos de tres elementos se pueden formar con 9 elementos?

El esquema de solución es: Se tiene el conjunto {A,B,C,D,E,F,G,H,I} y de él se derivan los siguientes subconjuntos:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
SE ESCOJE EL PRIMER ELEMENTODE LA TERNA								
A	B	C	D	E	F	G		
SE ESCOJE EL SEGUNDO ELEMENTODE LA TERNA								
AB	BC	CD	DE	EF	FG	GH		
AC	BD	CE	DF	EG	FH			
AD	BE	CF	DG	EH				
AE	BF	CG	DH					
AF	BG	CH						
AG	BH							
AH								
SE ESCOJE EL TERCER ELEMENTO DE LA TERNA								
							Número de ternas	
ABC	*ABD*	*ABE*	*ABF*	*ABG*	*ABH*	*ABI*	7	
ACD	*ACE*	*ACF*	*ACG*	*ACH*	*ACI*		6	
ADE	*ADF*	*ADG*	*ADH*	*ADI*			5	
AEF	*AEG*	*AEH*	*AEI*				4	
AFG	*AFH*	*AFI*					3	
AGH	*AGI*						2	
AHÍ							1	
	BCD	*BCE*	*BCF*	*BCG*	*BCH*	*BCI*	6	
	BDE	*BDF*	*BDG*	*BDH*	*BDI*		5	
	BEF	*BEG*	*BEH*	*BEI*			4	
	BFG	*BFH*	*BFI*				3	
	BGH	*BGI*					2	
	BHI						1	
		CDE	*CDF*	*CDG*	*CDH*	*CDI*	5	
		CEF	*CEG*	*CEH*	*CEI*		4	
		CFG	*CFH*	*CFI*			3	

		CGH	CGI				2
		CHI					1
			DEF	DEG	DEH	DEI	4
			DFG	DFH	DFI		3
			DGH	DGI			2
			DHI				1
				EFG	EFH	EFI	3
				EGH	EGI		2
				EHI			1
					FGH	FGI	2
					FHI		1
						GHI	1
			TOTAL DE TERNAS:				84

Pero la respuesta al problema de determinar cuántos subconjuntos de *p* elementos se pueden formar con *n* elementos se resuelve mediante la siguiente fórmula:

$$C_{(n,p)} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}, siendo\ n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Para el caso del problema anterior se tiene:

$$C_{(9,3)} = \frac{9!}{3!\,(6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 6!} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

En la teoría combinatoria y en muy variadas cuestiones de Aritmética y de Análisis (y por consiguiente en todas las demás disciplinas, las cuales tienen un fuerte basamento matemático) desempeñan un importante papel los números de la forma

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Un ejemplo del empleo de los números combinatorios es en el desarrollo de un binomio, como se muestra a continuación:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Para este caso los coeficientes coinciden con los números combinatorios que se muestran en el desarrollo:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6$$

Esta fórmula es más fácil de recordar para cualquier desarrollo.

En la teoría de las probabilidades se presentan problemas caracterizados por:

1. Se tiene un número de éxitos en una secuencia de ***n*** ensayos independientes entre sí.
2. Existe una probabilidad fija ***p*** de que el ensayo ocurra con éxito.
3. Sólo son posibles dos alternativas, éxito o fracaso, de modo que la probabilidad del fracaso es *1-p.*
4. Se trata de calcular la probabilidad de un número ***k*** determinado de éxitos.

Tal probabilidad se calcula por la fórmula $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Ejemplo: Se sabe que en una fábrica el 1% de los artículos producidos salen defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 1 artículos defectuosos en una compra de 10 artículos?

$$P(X=1) = \binom{10}{1}0{,}01^1(1-0{,}01)^{10-1}$$

$$P(X=2) = \frac{10!}{9! \times 1!}0{,}01^1(0{,}99)^9$$

$$P(X=2) = \frac{10 \times 9!}{9! \times 1}0{,}01^1(0{,}99)^9 = 0{,}091351724748364 \approx 9{,}13\%$$

Pero el problema original de combinaciones se puede complicar con una pequeña modificación, así, dejemos la cantidad de participantes, 5 alumnos y 4 alumnas y a la condición: “el problema consiste en determinar de cuántas formas se pueden seleccionar tres integrantes de esta aula para que representen al grupo en una reunión de estudiantes” agreguemos: “exigiendo que en cada representación participe <u>al menos una mujer</u>”

La situación queda según las siguientes variantes:

1.  *4 alumnas*$\times C_{(5,2)}$ *alumnos*$=4\times 10=40$

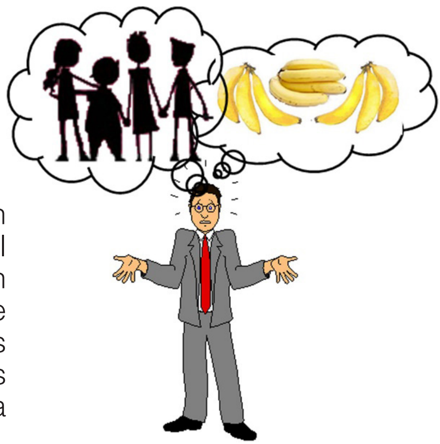
1.  $C_{(4,2)}$ *alumnas* $\times 5$ *alumnos*$=6\times 5=30$

1.  $C_{(4,3)}$ *alumnas* $=4$

Total 74 posibles formas de selección.

Otra forma de razonar es:

Total de grupos-Grupos de solo alumnos$=84-C_{(5,3)}=84-10=74$



Pero las combinaciones plantean otras problemáticas, por ejemplo, el señor que se muestra en la imagen tiene un gran problema, porque desea repartir 10 plátanos a 4 niños y se pregunta. ¿De cuántas formas diferentes es posible hacer la repartición?

Evidentemente el problema difiere del ya resuelto porque, mientras que con n objetos se pueden formar combinaciones ordinarias de órdenes 1,2, 3, ..., n, en cambio, se pueden formar combinaciones con repetición de cualquier orden, por grande que sea. Suponiendo formadas las combinaciones de orden (p-1) repetición, y alineando los elementos de cada una en orden numérico o alfabético, se forman todas las de orden p, agregando a cada una el último de los objetos que en ella figuran, y cada uno de los siguientes, hasta el último de los n objetos dados.

Lo expresado significa que haya elementos que se repitan, para el caso que nos ocupa, hay niños que alcanzarán más plátanos que otros, y por tanto son mayores las posibilidades de reparto. Antes de plantear la fórmula correspondiente a este tipo de combinaciones, obsérvese que con tres objetos a, b, c se pueden formar las siguientes combinaciones con repetición:

<table>
<tr><th>binarias</th><th>ternarias</th><th>cuaternarias</th></tr>
<tr><td rowspan="6">aa</td><td rowspan="3">aaa</td><td>aaaa</td></tr>
<tr><td>aaab</td></tr>
<tr><td>aaac</td></tr>
<tr><td rowspan="2">aab</td><td>aabb</td></tr>
<tr><td>aabc</td></tr>
<tr><td>aac</td><td>aacc</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ab</td><td rowspan="2">abb</td><td>abbb</td></tr>
<tr><td>abbc</td></tr>
<tr><td>abc</td><td>abcc</td></tr>
<tr><td>ac</td><td>acc</td><td>accc</td></tr>
<tr><td rowspan="3">bb</td><td rowspan="2">bbb</td><td>bbbb</td></tr>
<tr><td>bbbc</td></tr>
<tr><td>bbc</td><td>bbcc</td></tr>
<tr><td>bc</td><td>bcc</td><td>bccc</td></tr>
<tr><td>cc</td><td>ccc</td><td>cccc</td></tr>
</table>

Afortunadamente los matemáticos han encontrado una fórmula que permite calcular las combinaciones con repetición haciendo una modificación a las combinaciones sin repetición ya estudiadas, lo que conduce a la siguiente fórmula:

$$C_{r(p,n)} = \binom{p+n-1}{n} = C_{(p+n-1,n)}$$

Para comprenderla mejor para el caso que nos ocupa, consideramos que los plátanos no tienen identidad, son todas iguales. Por tanto, pensemos en asociar los 4 niños a los plátanos y por tanto pueden existir repeticiones de niños, es decir, cada niño puede estar asociado a más de un plátano, de ahí que se obtenga el siguiente resultado:

$$C_{r(4,10)} = \binom{4+10-1}{10} = \frac{13!}{10! \times 3!} = 286$$

Pero esto de las combinaciones con repetición tiene aplicaciones "más serias" para los matemáticos que la simple repartición de guayabas, un ejemplo puede ser el siguiente:

Diofanto de Alejandría
Nacido alrededor del 200/214 d. C.
Fallecido alrededor de 284/298 d. C.

Hace más de 1760, Diofanto de Alejandría planteó en su libro Aritmética las conocidas desde entonces como ecuaciones diofánticas. Se trata de ecuación algebraica, de dos o más incógnitas, cuyos coeficientes recorren el conjunto de los números enteros, de las que se buscan soluciones enteras, esto es, que pertenezcan al conjunto de los números enteros, un ejemplo de estas ecuaciones puede ser el siguiente:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Una solución de esta ecuación es:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 3, \qquad x_3 = 4, \qquad x_4 = 2$$

Ahora la pregunta: ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene esta ecuación diofántica?

Tenemos que seleccionar un total de 10 objetos (unidades) para formar 4 conjuntos (4 números). Es equivalente a repartir 10 plátanos entre 4 niños. En cada selección tenemos x_1 elementos en el primer conjunto, x_2 elementos en el segundo conjunto, x_3 elementos en el tercero y x_4 en el cuarto, que como ya se calculó resultan 286 formas de efectuar el reparto y que se corresponden con la cantidad de soluciones de la ecuación dada, porque evidentemente, además de la solución propuesta, otra podría ser:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4.$$

Esta es la maravilla de la matemática, el mismo modelo que dio solución al reparto de plátanos sirve para determinar la cantidad de soluciones de una ecuación matemática, pero si usted lo duda embúllese y encuentre todas las soluciones de la ecuación planteada.

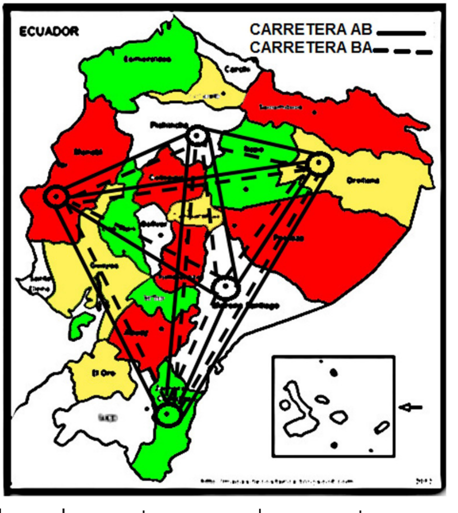
8.5. Variaciones

Se denomina variación a cada una de las tuplas (lista ordenada de elementos) que pueden formarse tomando elementos de un conjunto. Obsérvese en esta definición dos aspectos:

2. "Se toman elementos de un conjunto", es decir, se forman subconjuntos, desde este punto de vista se está en presencia de combinaciones.
3. Las "tuplas" son listas ordenadas, lo que las relaciona con las permutaciones.

En resumen, las variaciones son subconjuntos que constituyen listas ordenadas, expresando esto en lenguaje matemático se tiene que:

$$V_{(n,p)} = C_{(n,p)} \times P_p = \frac{n!}{(n-p)! \times \cancel{p!}} \times \cancel{p!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$



Ejemplo: Para un proyecto de conectar entre sí mediante carreteras dobles (ida-regreso) a cinco provincias de Ecuador (como se muestra en la imagen), ¿cuántas carreteras es necesario construir?

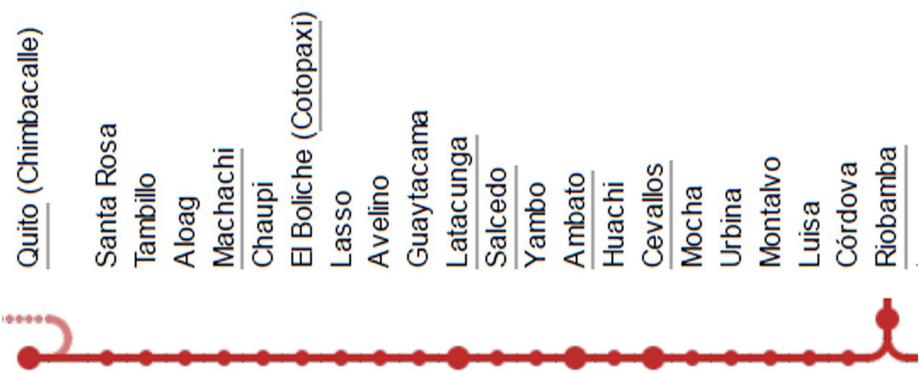
En la solución de este problema se necesita conocer la cantidad de conexiones de dos puntos tomados de los 5 que son necesario conectar, conociendo además que en cada dupla está formada por una carretera de ida y otra de regreso, por tanto, en cada subconjunto no entran todos los elementos y cada carretera se diferencia de la otra por los puntos que une y el sentido de esta unión (ida o vuelta).

Siguiendo la fórmula de las variaciones se tiene:

$$V_{(5,2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

Otro medio de transporte del Ecuador es el ferrocarril, el Ferrocarril Transandino es la principal línea férrea, su construcción duró 76 años y ahora conocido como Tren Ecuador. Conecta las dos ciudades más grandes del país: Guayaquil, el puerto fluvial principal, con Quito, la capital; tiene una extensión de 452 km.

Ferrocarriles del Ecuador



En la siguiente lámina se muestra un esquema de las 22 estaciones del Tren Ecuador comprendidas entre Quito y Riobamba, incluyendo ambas terminales.

Supongamos que la dirección del ferrocarril tuviera que utilizar el antiguo sistema de billetes para cobrar el pasaje, en los que cada billete lleve impresas las estaciones de origen y destino, ¿cuántos tipos de billetes diferentes tendría que imprimirse para tal control?

Evidentemente este sería otro problemas de variaciones, dado que interesa el orden (Salcedo-Montalvo, Montalvo-Salcedo) y en cada billete sólo hay dos estaciones de las 22; el cálculo sería:

$$V_{(22,2)} = \frac{22!}{(22-2)!} = \frac{22!}{20!} = \frac{22\times 21\times \cancel{20!}}{\cancel{20!}} = 462\ tipos\ de\ billetes$$

Calcule el lector la cantidad de tipos de billetes para todas las estaciones desde Quito a Guayaquil.

Variaciones con repetición:

Pero los elementos de las variaciones también pueden repetirse, sea en siguientes problemas:

Con los dígitos {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

a) ¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar sin repetir dígito?

b) ¿Cuántos si es posible repetirlos?

El problema a) se resuelve según el modelo mostrado: $V_{(9,2)} = \frac{9!}{(7)!} = \mathbf{72}$, pero para resolver el segundo problema, hay que añadir a las 72 variaciones ya obtenidas las correspondientes a los número {11,22,33,44,55,66,77,88,99 }, lo que hace un total de 72+9=81= 9^2. Pero si tuviéramos que obtener los números de 6 cifras que se pueden obtener con los dígitos {1,4,5,8} en este caso es 4^6=4096, si lo duda pruébelo manualmente, pero las variaciones con repetición se rigen por la siguiente fórmula: $V_{R(n,p)}=n^p$

Un problema interesante de variaciones con repetición por su relación con los grafos es el siguiente:

Un grafo G(V,E) se define bajo las siguientes condiciones:

c) Los vértices (V) es el conjunto de palabras de longitud 3 en el alfabeto {0,1}.

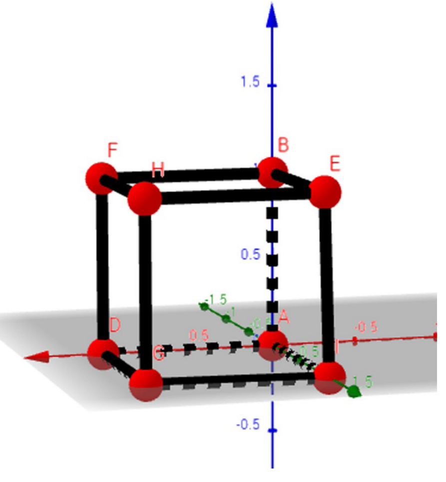
d)El conjunto E de aristas contienen los pares de palabras que difieren una posición exactamente

Muestre que el grafo así definido es isomorfo[5] al grafo formado por las esquinas y aristas de un cubo.

Solución:

La cantidad de palabras de longitud 3 que se pueden formar con los dos símbolos del alfabeto {0,1} está dada por $V_{R(2,3)}=2^3=8$. Estas 8 palabras son:

Vértice	Palabras	Vértice	Palabras
A	(0,0,0)	E	(0,1,1)
B	(0,0,1)	F	(1,0,1)
C	(0,1,0)	G	(1,1,0)
D	(1,0,0)	H	(1,1,1)



Con este ejemplo se pone de manifiesto una de la característica de la matemática y es la concatenación que existe entre sus diferentes ramas y decimos ramas porque creemos en **la matemática** como una

5 El concepto matemático de isomorfismo pretende captar la idea de tener la misma estructura. Dos estructuras matemáticas entre las que existe una relación de isomorfismo se llaman **isomorfas.**

sola y no en **las matemáticas** como defienden otros autores, en este elemental problema se mezcla la teoría combinatoria con la teoría de grafos, la geometría analítica y con el isomorfismo entre estructuras, uno de los más abstractos conceptos de teoría general de sistemas asumidos por la matemática e incorporado a sus sistema conceptual.

8.6. El principio de inclusión exclusión:

Comenzaremos planteándole la siguiente situación problémica:

> El profesor responsable de una clase dio al director de la escuela los siguientes datos sobre sus alumnos:
>
> En la clase estudian 45 escolares, de los cuales 25 son niños.
>
> 30 escolares tienen nota de bien y sobresaliente, entre ellos, 16 niños.
>
> 28 alumnos practican el deporte, habiendo entre ellos 18 niños y 17 escolares que tienen notas de bien y sobresaliente.
>
> 15 niños tienen nota de bien y sobresaliente y al mismo tiempo practican el deporte.
>
> Al cabo de varios días, el director de escuela (el cual, era profesor de matemáticas) llamó al profesor responsable de la clase y le dijo que su información era muy exhaustiva, pero que debía revisarla porque había cometido un error en los datos y efectivamente, el error existía, ¿cómo supo el director que en el informe había un error?

Para explicar la respuesta es necesario enunciar el siguiente teorema:

Teorema de la inclusión y la exclusión:

Si se tienen N objetos con las propiedades $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cada objeto puede:

Tener varias de estas propiedades: $N(a_i a_j \ldots a_k)$.

No tener ninguna propiedad: $N(a'_1 a'_2 \ldots a'_n)$ (a las que se excluyen se denotan con apóstrofe a'_k.)

Entonces:

$$N(a'_1 a'_2 \ldots a'_n) = N - N(a_1) - N(a_2) \ldots - N(a_n) + N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) \ldots + N(a_2 a_n) \ldots + N(a_{n-1} a_n)$$

Es decir, la cantidad de objetos que no tienen ninguna de las propiedades es igual a: el total de objetos (N) ***menos*** la cantidad de los objetos que tienen una sola propiedad, ***más*** la cantidad de objetos que tienen dos propiedades, ***menos*** la cantidad de los objetos que tienen tres propiedades, ***más*** la cantidad de objetos que tienen cuatro propiedades y así sucesivamente hasta agotar la cantidad de todos los grupos de objetos según la cantidad de propiedades.

Evidentemente N $(a'_1 a'_2 ... a'_n)$ toma valor cero cuando todos los objetos tienen algunas de las propiedades asociadas a los objetos y mayor que cero en caso contrario, pero, nunca N $(a'_1 a'_2 ... a'_n)$ tomará valores negativos.

Para el problema propuesto se tiene:

Propiedades: V=es varón, B=obtiene buenas notas D=practica deportes

Datos: N=45, N(V)=25, N(B)=30, N(D)=28

N(VB)=16 N(VD)=18 N(BD)=17

N(VBD)=15

Cálculo: N(V´B´D´)=45-25-30-28+16+18+17-15= -2

¡Según el teorema de inclusión-excusión la información fue inconsecuente!

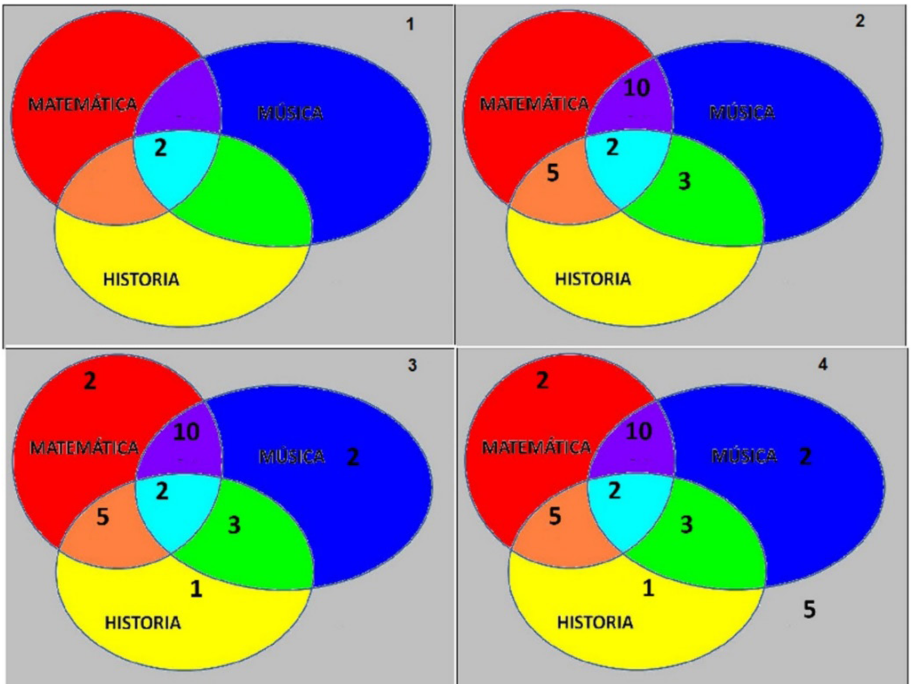
Un problema típico para resolver aplicando el teorema de inclusión-exclusión es el siguiente:

En una escuela se reportan los siguientes datos respecto a las asistencias a cursos de Matemática, Historia y Música de los alumnos de un grupo de 30 alumnos:

- 19 han asistido a las clases de Matemática.
- 17 han asistido a las clases de Música.
- 11 han asistido a las clases de Historia.
- 12 han asistido a las clases de Matemática y música.
- 7 han asistido a las clases de Historia y Matemática.

- 5 han asistido a las clases de Música e Historia.
- 2 han asistido a las clases de Matemática, Historia y Música.
- Haga un estudio del comportamiento de las asistencias de los alumnos por combinaciones de cursos; ejemplo: ¿Cuántos han asistido a Historia, pero no a Matemática? ¿Cuántos no han tomado ninguno de los cursos ofrecidos? ¿Cuántos han tomado exactamente dos de los tres cursos ofrecidos?

Una solución mediante diagramas de Venn[xliv] es la siguiente:



Solución mediante el teorema de inclusión-exclusión:

- N(ma’mu’his’)= N – N(ma)- N(mu) – N(h) + N(mamu)+ N(mah) + N(muh) – N(mamuh)
- N(ma’mu’h’) = 30 – 19-17-11 + 12+ 7 + 5 – 2 =5
- N(mamuh’) =12-2=10; N(mamu’h)=7-2=5
- N(ma’muh)=5-2=3

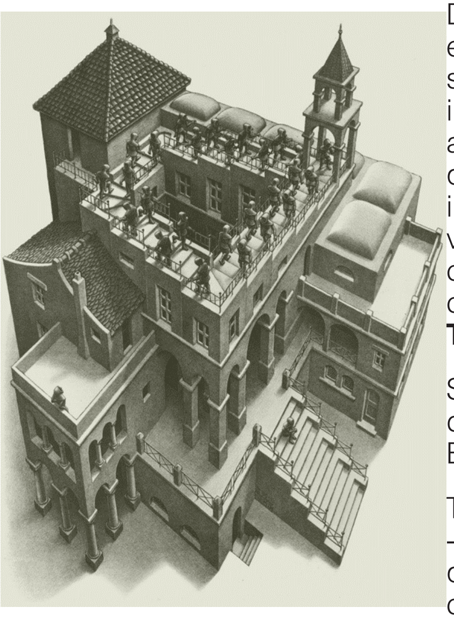
- N(mamu'h') =N(ma)-N(mamuh')-N(mamu'h)- N(mamuhis)= 19-10-5-2 =2
- N(ma'muh') =N(mu)-N(ma'muh)-N(mamuh')- N(mamuhis)= 17-3-10-2 =2
- N(ma'mu'h) =N(h)-N(ma'muh)-N(mamu'h)- N(mamuhis)= 11-3-5-2 =1

Capítulo IX. Lo que los cuerpos esconden…

“La génesis de la invención matemática es un problema que debe inspirar mucho interés al psicólogo. Es el acto en el cual el espíritu humano prescinde más del mundo exterior, en el que no obra más que por él mismo y sobre él mismo, de manera que, estudiando los procesos del pensamiento geométrico, podemos tener esperanzas de alcanzar lo más esencial de él”.

Jules Henri Poincaré

9.1. La topología como rama de la Matemática



De todas las ramas de la matemática existe una que puede parecer muy sencilla, pero a medida que vamos indagando sobre sus posibles aplicaciones nos damos cuenta de que abarca un campo increíblemente inmenso a tal punto de que nunca vamos a saber precisamente cuándo se terminarán sus contenidos. Esa rama se llama: **Topología**.

Sobre este término el diccionario de Real Academia de la Lengua Española dice lo siguiente:

Topología. (Del gr. τόπος, lugar, y -logía). f. Rama de las matemáticas que trata especialmente de la continuidad y de otros conceptos más generales originados de ella, como las propiedades de las figuras con independencia de su tamaño o forma. En la imagen adjunta se muestra “Subir y bajar” cuadro del pintor holandés Maurits Cornelis Escher[xlv], en el que se da una visión topológica del espacio.

Esta información en realidad dice muy poco, principalmente a usted que es muy posible que jamás hubiese siquiera escuchado acerca de este concepto, pero no se culpe, puesto que normalmente no se nombra, aunque se tenga que usar constantemente.

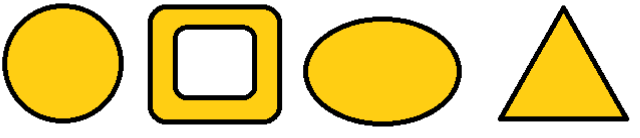
Para comenzar vamos poner un ejemplo que el conocido profesor argentino Adrián Arnoldo Paenza planteó en uno de sus programas de la serie televisiva “Alterados por PI”

“Para encaminarlos a través de esta rama. Digamos que por ejemplo usted esté usando medias (calcetines) en estos momentos y yo le hago la siguiente pregunta: ¿Tiene usted algún agujero en la media? Usted probablemente esté sumamente tentado a decir: ***Mire… no tengo ningún agujero en la media***. Sin embargo, puede que me entren ganas de bromear y le conteste con lo siguiente: ***Entonces… ¿por dónde mete usted el pie? ¿Acaso eso no es un agujero?*** Pero tanto usted como yo tenemos en cuenta de que eso no es ni medio cercano a ser un agujero en la media. Para aclarar el argumento anterior hagamos el siguiente análisis:

Tomemos la media y desajustémosle la forma hasta tal punto de que se vuelva un círculo. También debemos tener en cuenta que el nuevo material del que estará compuesto esta media será el equivalente al de un chicle o una goma. Luego de eso sencillamente procedemos a meter el pie y hundirlo. De esta manera ya tendríamos formada una media y de paso sabemos que en realidad su superficie no consta de ningún agujero, sino que moldeamos su forma hasta tal punto que así lo puede parecer. Es esencialmente esta propiedad la que estudia la **topología**. Estudia la propiedad de los objetos prescindiendo del tamaño y forma que estos poseen. La **topología** estudia las propiedades de los cuerpos, pero asignándoles la capacidad de actuar como lo haría una goma. Lo que uno debe hacer más en esta rama siempre es contar la cantidad de agujeros que van a resultar después de hacer un procedimiento topológico, pero puede ser el caso de una taza que tiene un aza por donde uno la toma, sería algo muy diferente a lo que estudia la topología, siendo totalmente opuesto a una esfera o a una media".

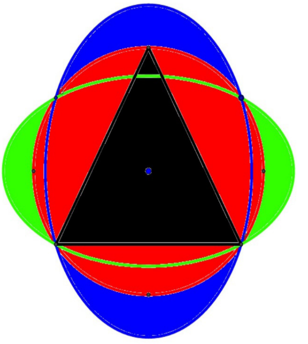
9.2. Superficies topológicamente equivalentes

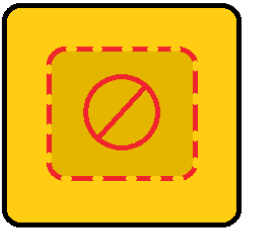
Para continuar en esta línea de pensamiento, adaptamos al texto escrito algunas ideas planteadas en la referida serie de televisión. Seleccionemos las siguientes cuatro figuras: el **círculo**, el **anillo cuadrado**, la **elipse** y el **triángulo**. Formúlese usted mismo la siguiente pregunta y trate de contestarla: ¿Cuál de todas esas figuras les parece más extraña?, es decir, la que más difiere con las restantes.



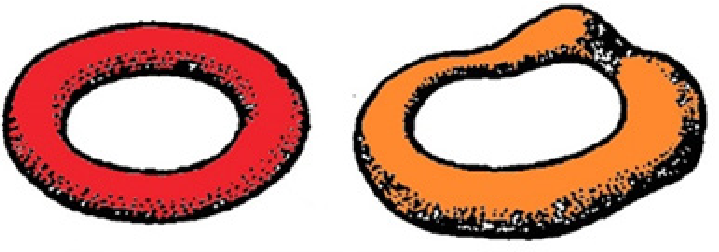
Evidentemente, dirá usted el **anillo cuadrado**; no se alarme, no hay trampas, esa es la figura que la mayoría están tentados a señalar, dado que es la única de todas las anteriores que posee un agujero; pero los matemáticos no pueden responder de ese modo y expresan la misma idea que lo llevó a usted a seleccionar el anillo cuadrado de la siguiente manera:

La respuesta parte de suponer que tenemos un círculo de goma, si, un círculo hecho de goma y mejor goma de mascar (chicle), esta imagen de figuras de goma que se pueden estirar y deformar es fundamental para trabajar con un enfoque topológico; ahora iremos deformando el círculo hasta tal punto de que obtengamos todas las figuras anteriores, círculo, elipse, triangulo, etc. Pero a la hora de obtener un **anillo cuadrado** tendríamos que abrirle un agujero, y eso no está permitido en la topología. Esto hace que se defina un principio de equivalencia entre figuras:

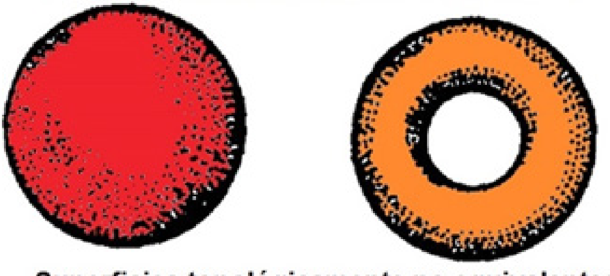




"Si una figura se puede estirar hasta formar otra, entonces son equivalentes desde la óptica de la ***topología****"*.



Superficies topológicamente equivalentes



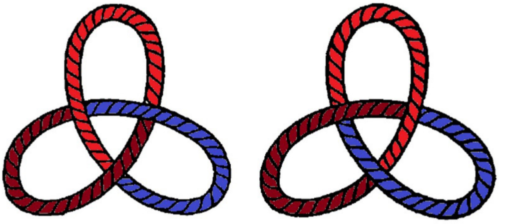
Superficies topológicamente no equivalentes

9.3. Desamarrando nudos:

Otro aspecto muy importante que forma parte la **topología** es el desamarre de nudos, de modo que cada vez que a usted se le arma un enredo con el hilo de la caña de pescar y logra zafarlo, ha resuelto un problema de topología.

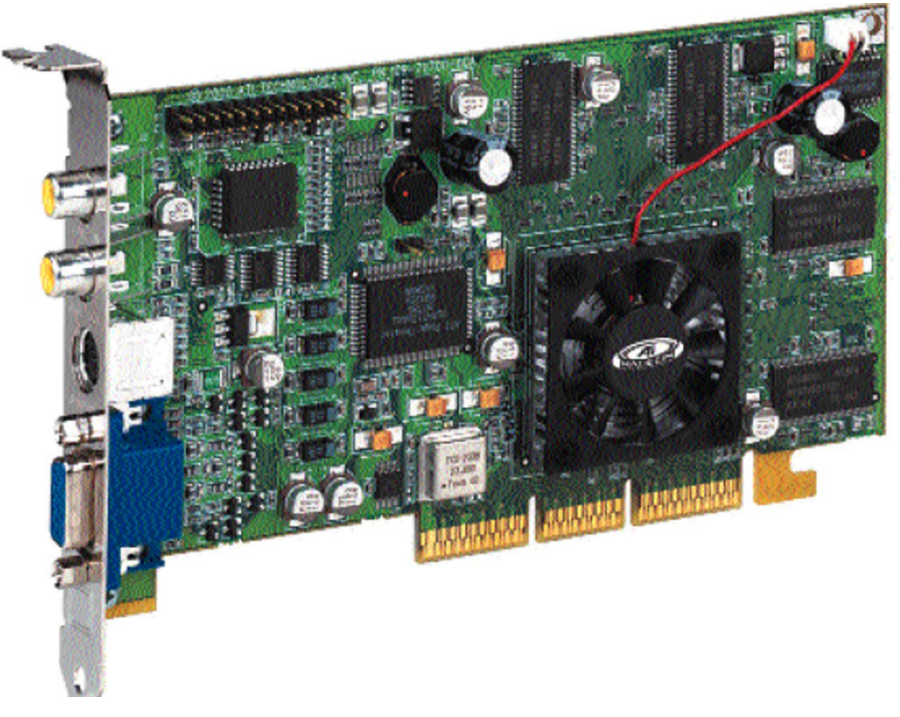
Un nudo se hace entrelazando un trozo de cuerda, después de lo cual se unen los extremos. La curva cerrada resultante representa una figura geométrica que sigue siendo esencialmente la misma después de deformar o retorcer. la cuerda, sin romperla. Pero ¿cómo es posible dar una caracterización intrínseca que permita distinguir una curva cerrada, con nudos, situada en el espacio, de otra sin ellos, como, p. ej., una circunferencia? La respuesta no es en modo alguno sencilla y menos todavía lo es el análisis matemático completo de las distintas clases de nudos y de sus diferencias mutuas. Aun para los casos más sencillos esto ha resultado una tarea trabajosa. Considérense los dos nudos triples que aparecen en la figura adjunta.

Ambos son completamente simétricos, "imágenes especulares" uno del otro; son topológicamente equivalentes, pero no congruentes. Surge el problema de saber si es posible deformar uno de estos nudos en el otro de una forma continua. La respuesta es negativa, pero la demostración de este hecho requiere mayores conocimientos de la técnica topológica y de la teoría de grupos que no es posible dar aquí.

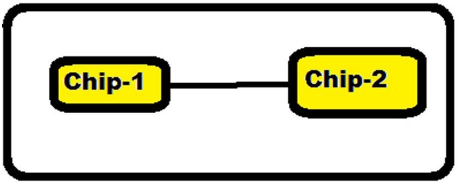


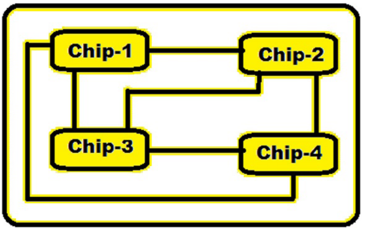
Nudos topológicamente equivalentes, que no se pueden deformar uno en el otro.

9.4. Conexiones

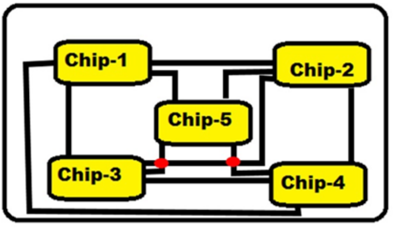


Las conexiones es otro problema de la topología y hoy tiene una singular importancia en la construcción de computadoras, sin la topología no hubiera sido posible construir la tarjeta anterior, pero para ilustrar esta importancia pongamos un ejemplo sencillo, para explicar el gran problema que plantea la topología, supongamos que tenemos una placa en la que están ubicados dos chips. La forma en la que estos dos chips se pueden juntar son muchas y cumplen su objetivo de enlazar los circuitos.



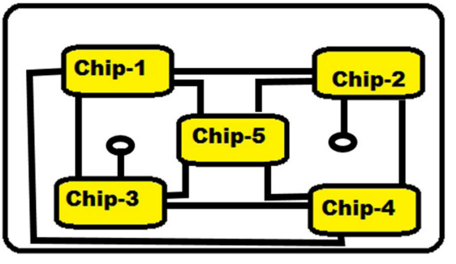


Pero ahora supongamos que, en lugar de tener dos chips en una placa, disponemos de una placa con cuatro chips como se muestra en la imagen adjunta, aunque con mayor dificultad es posible hacer las conexiones entre todos los componentes sin que dos conexiones se superpongan, pero, ¿qué sucede cuando tenemos 5 chips?

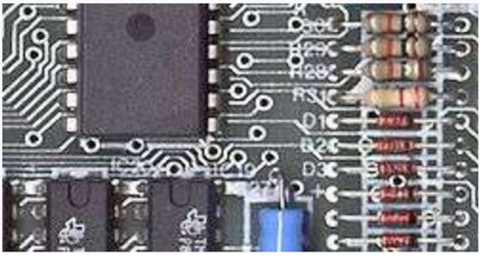


Para la de cinco no importa lo que hagamos, siempre habrá un punto en el que las conexiones de los chips terminen colisionando. No podemos llegar a evitar que haya un cruce.

Para evitar que ese cruce llegue a formarse vamos a necesitar lo que se llama **puente**. Pero digamos que casualmente la placa trae consigo dos agujeros. En ese caso no haría falta realizar un **puente** sino introducir el cable por uno de esos agujeros, sacarlo por el otro y hacer satisfactoriamente la conexión.



Cuando hay 5 conexiones esta es una solución, pero qué sucede cuando hay miles de conexiones como ocurre en cualquier placa de una computadora, cuál es la distribución óptima de los componentes para que las líneas de conexión no se corten. Estos son algunos de los problemas que se resuelven mediante la topología y en base a ellos es posible obtener un circuito impreso como el que se muestra en la imagen:



Estas "placa de circuito impreso" (del inglés: Printed Circuit Board, PCB), son superficies constituida por caminos, pistas o buses de material conductor laminadas sobre una base no conductora. El circuito impreso se utiliza para conectar eléctricamente a través de las pistas conductoras, y sostener mecánicamente, por medio de la base, un conjunto de componentes electrónicos. Las pistas son generalmente de cobre mientras que la base se fabrica generalmente de resinas de fibra de vidrio reforzada, Pertinax, pero también cerámica, plástico, teflón o polímeros como la baquelita.

9.5. La Topología en la Historia

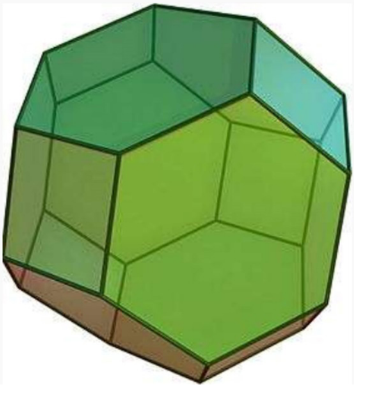
Los primeros planteamientos acerca de la **topología** están relacionados con el concepto de **límite**, el cual comienza a ponerse de manifiesto principalmente a partir de la crisis sufrida por los **pitagóricos** con la aparición de un tipo de números llamados **reales no racionales**. Hubo un primer acercamiento al concepto de límites dado por **Arquímedes** a raíz de su método exhaustivo.

Comienza a establecerse una fecha más exacta para el origen de la **topología** a partir del año 1735. Esto se debe gracias al planteamiento de **Euler** en la solución al problema de **Los Puentes de Königsberg**. Ya sé que anteriormente en este libro se ha hablado que dicha incógnita está relacionada con el tema de **Teoría de grafos**, pero ¿quién dijo que cada problema matemático está atado a una única óptica de solución? Es evidente que el problema de los puentes tiene un gran enfoque en la **teoría de grafos**, pero debemos admitir que en la **topología** también tiene gran influencia, puesto que sigue siendo un caso en el que debemos analizar minuciosamente la superficie de un objeto, o en este caso el de una zona.

Para la resolución del problema **Euler** tuvo que desarrollarla a partir de un razonamiento topológico, dando con la respuesta que tiene un enfoque que nos lleva a la **característica de Euler**. La **característica de Euler** es un número definido que permite ampliar determinada clase de **espacios topológicos**. Esta característica sería considerada como la primera invariante de la **topología algebraica**.

Pese a todo lo dicho anteriormente, habría que aclarar que el término **topología** no fue usado hasta 1836 por el matemático alemán **Johann Benedict Listing** . Esto fue a raíz de que **Johann** había escrito una carta a su profesor de primaria y posteriormente el concepto fue agregado en el libro **Vorstudien zur Topologie (Traducción: "Estudios Previos a la Topología")** el cual fue publicado en 1847.

Establezcamos de esta manera una cronología de lo que probablemente hubiese sido todo el trayecto de la **topología** a través de la historia.

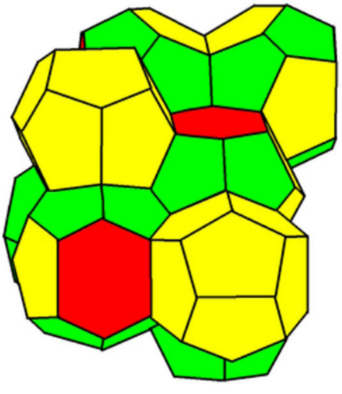


Año 300 a.C Euclides hace un profundo análisis que aporta la definición de **secciones cónicas** y realiza un intenso estudio sobre los **poliedros regulares**, que estos constituyen unas de las formas más básicas por las que se guían los topólogos en sus estudios.

Año 250 a.C Arquímedes realiza una importante investigación acerca de las **curvas espirales** y de los **poliedros truncados**. Al tratar las espirales se mostrará la espiral de Arquímedes, de los poliedros truncados en la imagen se muestra el octaedro truncado, el cual se obtiene truncando cada vértice de un octaedro o también se puede conseguir truncando los vértices de un cubo. También ha denominado esta figura como tetracaidecaedro o poliedro de Kelvin; llamado así porque En 1887, Lord Kelvin se preguntó cómo podría particionarse el espacio en celdas de igual volumen con el área más pequeña de contacto entre ellas, dicho de otra manera, con qué cuerpo es posible rellenar todo el espacio sin dejar vacíos, Este problema fue llamado desde entonces el problema de Kelvin y para solucionarlo su autor propuso que la espuma del panal cúbico bitruncado, que se muestra en la imagen adjunta y que es conocida como estructura de Kelvin resuelve el problema de Kelvin.

Desde entonces esta afirmación se conoce como conjetura de Kelvin, porque tal afirmación no ha sido demostrada.

Pese a esta falta de demostración la conjetura tuvo buena aceptación, hasta que en 1993 Denis Weaire y Robert Phelan, dos físicos del Trinity College (Dublín), descubrieron que, en simulaciones informáticas de la espuma, existe una estructura que era una mejor solución al "problema de Kelvin" que la estructura de Kelvin.



La nueva estructura, la cual se muestra en la imagen adjunta, utiliza dos tipos de celdas de igual volumen; un dodecaedro pentagonal irregular y un tetracaidecaedro con dos hexágonos y doce pentágonos, otra vez con caras ligeramente curvadas. El área de superficie es 0.3% menos que la de la estructura de Kelvin, en este contexto una diferencia considerable, pero todavía no se ha probado que la estructura de Weaire-Phelan sea óptima, aunque los especialistas consideran que es la más apropiada para resolver el problema de Kelvin y ya fue aplicada en la construcción del Centro Acuático Nacional de Beijing construido con motivo de los Juegos Olímpicos de 2008 en China. Por lo tanto, el problema de Kelvin está todavía abierto, ahora con una nueva conjetura, que afirma que la estructura de Weaire-Phelan es su solución, pero, insistimos, **SIN QUE NADIE LO HAYA DEMOSTRADO TODAVÍA CON RIGOR MATEMÁTICO.**

Centro Acuático Nacional de Pekín

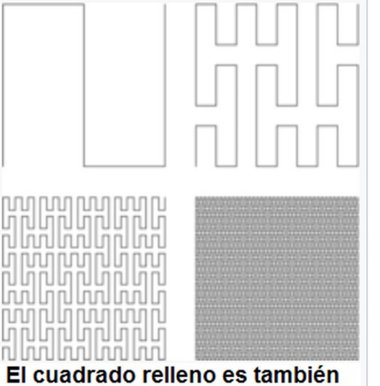
El Cubo de agua en construcción. Observe la estructura de Weaire-Phelan

Aunque en la redacción del texto se ha perdido momentáneamente la continuidad histórica, los autores han preferido desarrollar la idea del problema de Kelvin, primero para mostrar la continuidad del pensamiento matemático desde la antigüedad griega hasta nuestros días y en segundo lugar para mostrar un problema de fácil comprensión para todos y que los matemáticos no han podido resolver.

Año 1735 d.C Euler le da solución al problema de **Los Puentes de Königsberg**.

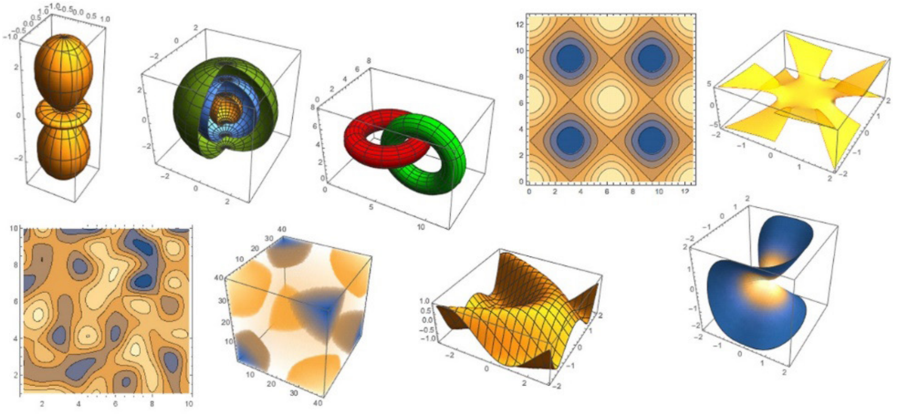
Año 1858 Dos alemanes, conocidos como **August Möbius** y **Johann Benedict Listing**, hacen una investigación por separados la cual termina aportando la singular figura que hoy conocemos como **La Banda de Möbius.**

Año 1890 El filósofo y matemático italiano **Giuseppe Peano** hace la demostración de que un cuadrado relleno es también una curva, la llamada curva de Peano, tipo de curva continua que "recubre" todo el plano (específicamente, la curva es un conjunto denso del plano). Este tipo de curvas se obtienen mediante una sucesión de curvas continuas sin intersecciones que convergen a una curva límite todo esto a partir de la **Definición de Jordan** dada mediante en siguiente teorema**:**



El cuadrado relleno es también una curva: la curva de Peano

Teorema de la curva de Jordan: Toda curva cerrada simple del plano divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior.



Desde los años 1920 – 1930 El matemático ruso **Pável Urysón** y el matemático austriaco **Karl Menger** definen el concepto de curva a partir del uso de la **topología**. La cantidad de figuras estudiadas por la topología y que desafían el sentido común y las dimensiones del espacio es considerable, algunos nos son familiares, otros no tanto, una muestra es la imagen adjunta.

Tal diversidad, aunque incita al estudio profundo se aleja de los propósitos de este libro que es el de mostrar una visión panorámica de la matemática, por eso nos concentraremos en:

- La Banda de Möbius
- La Botella de Klein y
- El Toro

9.6. La Banda de Möbius

Anteriormente se hizo mención a dos matemáticos que construyeron esta singular figura de forma independiente, pero ¿saben ustedes precisamente lo que es esta banda? Quizás muchos cometan el error de pasar por alto o subestimar la importancia de tan increíble figura, pero hay que recordar que, en matemática, por muy pequeño que sea, cada detalle constituye una cantidad infinita de posibilidades para que tenga un desarrollo científico.

Esta figura posee la extraña propiedad de ser una figura con una sola cara, pero que sin embargo fue dada a partir de una con dos caras. Para construir la **Banda de Möbius** se debe tomar una larga tira de papel y se pegan las puntas de los extremos, sin embargo, para que nos resulte bien, debemos darle la vuelta a uno de esos extremos y luego pegarlo.

Banda de Moebius construida con un rectángulo de papel cuyos extremos se giraron y pegaron.

La banda de Moebius tiene una ecuación paramétrica expresada por:

$$\begin{cases} x(u,v) = \left[1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right]\cos(u) \\ y(u,v) = \left[1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right]\sin(u) \\ z(u,v) = \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2} \end{cases}$$

donde $0 \leq u < 2\pi$ y $-0.5 \leq v \leq 0.5$.

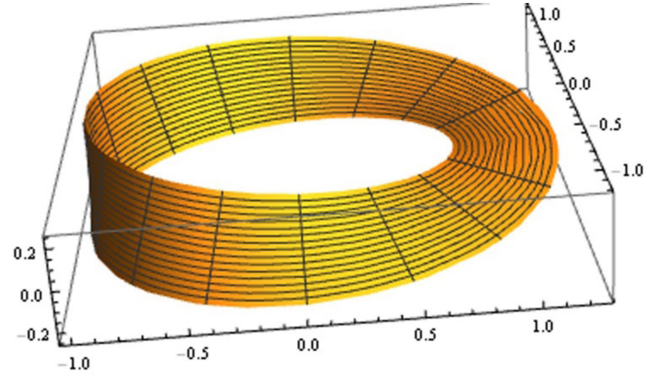
Mediante el asistente Wolfram Mathematica es posible obtener la Banda de Moebius expresando la ecuación anterior con el siguiente comando:

$$\text{ParametricPlot3D}[\{(1 + \frac{v}{2}\text{Cos}[\frac{u}{2}]) * \text{Cos}[u], (1 + \frac{v}{2}\text{Cos}[\frac{u}{2}]) * \text{Sin}[u], \frac{v}{2} * \text{Sin}[\frac{u}{2}]\},$$

$$\{u, 0{,}2\pi\}, \{v, -0.5{,}0.5\}]$$

Al ejecutar el comando se obtiene el siguiente gráfico:

Propiedades de La Banda de Möbius



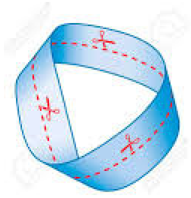
A lo largo de todo este libro hemos visto que distintos planteamientos, figuras y problemas poseen diversas características que los hacen únicos. Y ¿por qué iba a ser esta figura la excepción a la regla?

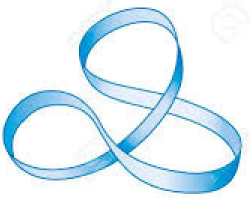
1- Su superficie solamente posee una cara: La explicación a esta propiedad es mucho más fácil si seguimos el ejemplo que les he dado con los colores. Si además de eso intentamos colocar un dedo sobre "una de sus caras" podemos ver que las tocamos "todas". En realidad, esto no es así, porque como explica esta propiedad, solamente tiene una cara.

2- Su superficie es no orientable: Digamos que tenemos en nuestra posesión un par de ejes. Al hacerlo pasar por la banda, casi que al igual que con el dedo, podremos ver que volvemos al punto de partida, pero con el sentido del eje invertido. Existe un experimento que plantea que, si tuviésemos una banda de tamaño gigantesco y que una persona estuviese dispuesta a acostarse e irse rodando por toda la superficie mirando hacia la derecha, entonces al volver al punto de partida estará mirando hacia la izquierda.

3- Su superficie solamente posee un borde: Todas las propiedades de la banda pueden ser comprobables si así lo disponemos. También podemos comprobar esta propiedad si seguimos el borde con un dedo.

4- ¿Propiedades imposibles? Puede que resulte un poco confusa la siguiente propiedad que me dispongo a explicar, así que es recomendable que tengamos una **Banda de Möbius** de papel con nosotros y un par de tijeras. Evidentemente, deberemos ir haciendo





determinados cortes para ver las distintas propiedades. Digamos que por ejemplo tenemos la banda y le realizamos un corte justo por el centro y lo llevamos a todo lo largo. El resultado se logra en el caso de hacer un corte casi perfecto en la mitad, obteniendo una banda mucho más larga que la anterior, pero con dos vueltas. Si se vuelve a hacer el procedimiento se obtienen dos nuevas bandas entrelazadas con las anteriores. Si no se llega a realizar un corte justo en la mitad, lo que se obtienen son dos bandas de distinto tamaño, una sería el doble de grande que la otra.

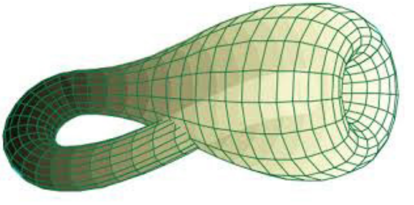
La **Banda de Möbius** en el arte:

En la vida práctica también está presente la **Banda de Möbius,** algunos ejemplos se han resumido en la siguiente composición.

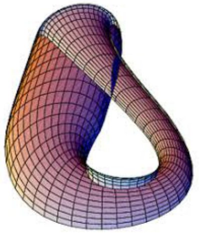
El Aviva Stadium (en irlandés Staid Aviva), informalmente conocido como New Lansdowne Road Stadium, situado en Dublín, República de Irlanda, inaugurado el 14 de mayo de 2010.

Más espectacular resultan las fotos del estadio de Dublind en la República de Irlanda.

9.7. La Botella de Klein



Además de **La Banda de Möbius** también tenemos determinadas figuras que hacen a la topología aún más interesante de lo que ya podemos apreciar. Tal es el caso de la **Botella de Klein**, figura que, al igual que la **Banda de Möbius**, posee una superficie no orientada y abierto, cumpliendo que su **característica de Euler** es nula. Esta figura cumple la interesante propiedad de que

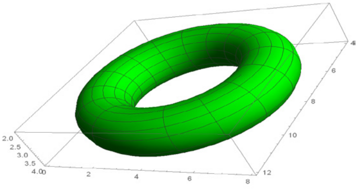


no posee ni un exterior ni un interior y también carece de bordes. Podríamos hacer una comparación con la esfera y decir que esta tampoco tiene bordes, pero al contrario de la botella, esta sí está orientada.

La **Botella de Klein** fue concebida por primera vez a partir del planteamiento del matemático alemán **Felix Klein** en 1882. En un principio esta figura no había adoptado el nombre de **Botella de Klein**, sino **Superficie de Klein**. Esto se debe a una mala traducción al confundir las palabras **Flasche (Botella)**, con **Fläche (Superficie)**. Esta figura sin duda alguna hace que las personas admitan que tiene cierto parecido a una botella, fue probablemente esta razón la que hizo que casi nadie se percatara del error y siguiera llamando la figura por **Botella** y no por **Superficie**, a decir verdad, me gusta más botella.

9.8. El Toro

Si seguimos hablando de figuras geométricas que están presentes en la topología, sería un pecado muy grave mencionar a **La Banda de Möbius** y a **La Botella de Klein** sin permitirnos hacer énfasis en el **Toro**. El **Toro** vendría siendo una superficie en revolución que se genera a partir de una circunferencia que gira alrededor de una **recta exterior coplariana**.



En lenguaje topológico, el Toro es una superficie completamente cerrada, la cual se define a partir del producto de dos circunferencias. De esta manera, el Toro equivale a una superficie cerrada orientable del género 1; su ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = \cos\theta(R + r\cos\varphi) \\ y = \sin\theta(R + r\cos\varphi) \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

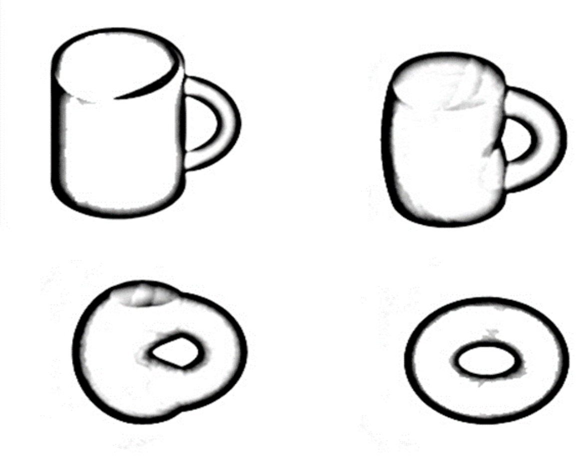
Ecuación paramétrica del toro

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$$

Ecuación cartesiana del toro

Utilizando el asistente Wolfram Mathematica se puede obtener el Toro de la figura adjunta mediante la escritura de su ecuación paramétrica en el comando ParametricPlot3D como se expresa a continuación:

```
ParametricPlot3D[{{8+(3+Cos[v])Cos[u],3+Sin[v],4+(3+Cos[v])Sin[u]}},{u,0,2Pi},{v,0,2Pi},PlotStyle→{Green}]
```



En topología, un homeomorfismo (del griego ὅμοιος (homoios) = misma y μορφή (morphē) = forma) es una función de un espacio topológico a otro, que cumple con ser una función biyectiva continua y cuya inversa es continua. En este caso, los dos espacios topológicos se dicen homeomorfos. Las propiedades de estos espacios que se conservan bajo homeomorfismos se denominan propiedades topológicas. Dos objetos son homeomorfos si uno puede convertirse, deformándose, en el otro sin cortar ni encolar. Así, en topología, una taza es homeomorfa con un toro y en la imagen se muestra el proceso de transformación de uno en otro.

Aplicaciones del Toro en la física

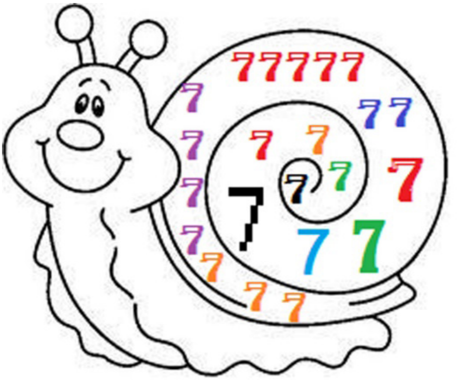
En física, si enrollamos una bobina con una determinada cantidad de vueltas sobre el **toro** con un entrehierro, se generaría un campo magnético interior. Esta aplicación constituye la creación de los imanes a partir de colocar un metal ferromagnético en el entrehierro y se empieza a transmitir una corriente eléctrica por la bobina. El proceso termina cuando el metal ha alcanzado su saturación, a lo cual debe ser retirado y posteriormente ya habrá obtenido las propiedades magnéticas.

Capítulo X. Cuando la vuelta sigue a la vuelta

“La filosofía está escrita en un gran libro que es el universo, el cual permanece continuamente abierto ante nuestros ojos. Pero ese libro no nos es inteligible a menos que antes aprendamos a comprender el idioma e interpretar los signos de que está compuesto. Está escrito en el idioma de las matemáticas, y sus signos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra de él”.

Galileo Galilei

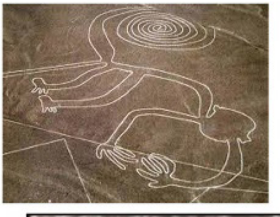
10.1. La espiral



Si bien el siete es el número más importante en nuestra vida y nuestra cultura occidental, dado que siete son: los días de la semana, los colores del arcoíris, las notas musicales, las artes, las maravillas de mundo antiguo, los pecados capitales, los dolores de la virgen, lo sabios de la antigua Grecia, los enanitos de Blancanieves, las iglesias del Apocalipsis, etc., etc., ninguna curva se encuentra tan presente a nuestro alrededor, ni ha atraído tanto al ser humano, desde los tiempos más remotos, como la espiral.

Además de las constelaciones que tienen forma de espiral, su presencia en los objetos vivos, tanto animales como vegetales, llamó la atención a nuestros antepasados y nos sigue impresionando a nosotros, por eso, numerosas culturas entre ellas las mesoamericanas han utilizado la espiral como elemento simbólico, mágico o simplemente ornamental.

Galaxia de Andrómeda o Galaxia Espiral M31



Figuras con espirales talladas en la piedra del barrio San Agustín, Archidona, Ecuador

La espiral ha acompañado al ser humano en todo tiempo y en todo lugar, por eso el poeta Vladimir Nabokov[lvi] expresó:

"La espiral es un círculo espiritualizado. En la forma espiral, el círculo, desenrollado, devanado, ha dejado de ser vicioso... La vuelta sigue a la vuelta, y toda síntesis es la tesis de la nueva serie".

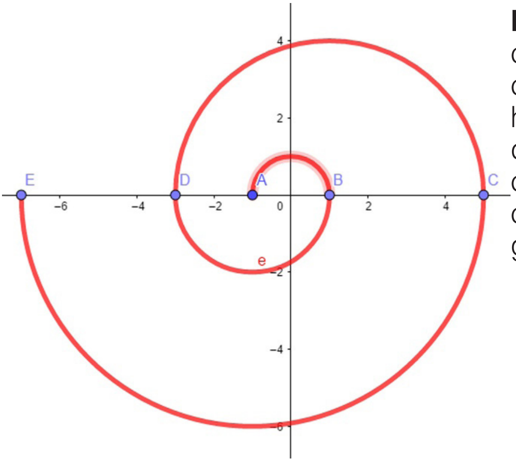
En contraste con esta realidad, en las clases de matemáticas de la enseñanza media la espiral no es objeto de estudio porque generalmente no aparece en los planes de estudio y su empleo es limitado en centros de la enseñanza tecnológica e ingeniería para el nivel universitario; pero en la antigüedad, cuando la observación era el método por excelencia empleado por filósofos y científicos, ante las innumerables manifestaciones naturales de las espirales, tanto de carácter orgánico como mecánico, estas curvas no podían dejar de llamar la atención de los matemáticos y fue objeto de su investigación, aunque por su propia forma son curvas esquivas, es decir, no son geométricas estáticas como la circunferencia, las cónicas o las lúnulas y para construirlas se necesitan recursos mecánicos para representar algo que crece o que se nueve.

En este trabajo nos concentraremos en el aspecto matemático de la espiral e intercalaremos imágenes de la espiral en la naturaleza el arte y la vida en general, por eso es conveniente comenzar por una definición:

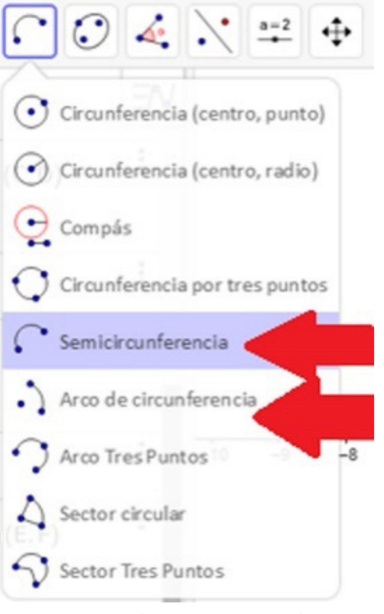
"Una espiral es una línea curva generada por un punto que se va alejando progresivamente del centro a la vez que gira alrededor de él".

10.2. Tipos de espiral

Empezaremos por la más sencilla construcción de la espiral que puede hacerla cualquier lector con una regla y un compás o como las que se muestran generadas por la aplicación GeoGebra[lvii].



La espiral de dos centros: como su nombre lo indica, la construcción de esta espiral se hace tomando como referencia dos puntos que haciendo centro alternativamente en cada uno se construye la gráfica.

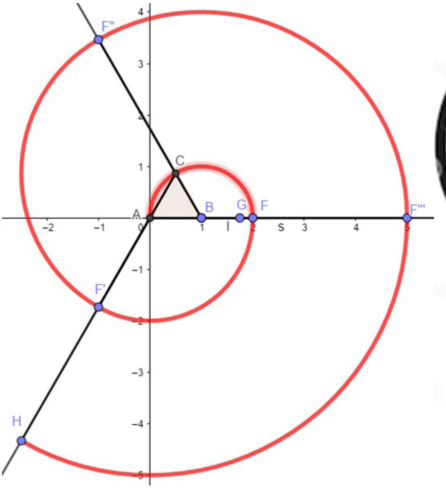


Inicialmente se traza la semicircunferencia AB, después con centro en A y radio AB se traza el arco BD, a continuación, se cambia el centro para B y con radio BD se traza el arco DC y así sucesivamente se continúa el proceso.

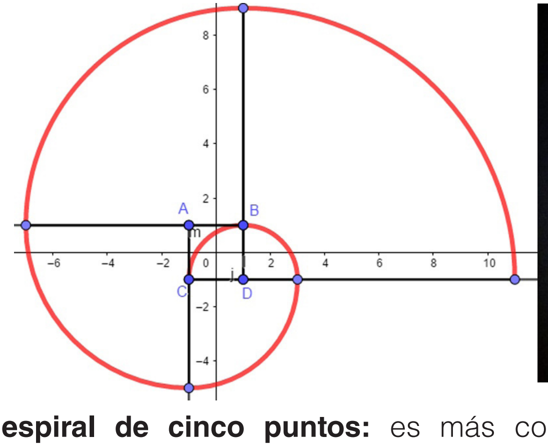
En imagen adjunta se muestran las dos opciones del menú GeoGebra que más se utilizan para trazar la espiral de dos puntos.

La espiral de tres centros: Al igual que la de dos centros, la de tres alterna el centro de trazar cada arco con los tres vértices de un triángulo equilátero como se muestra en la imagen:

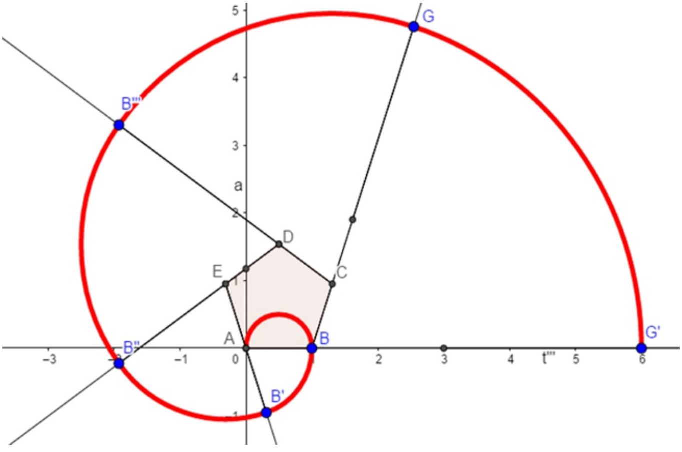
Obsérvese que toda la espiral se desarrolla alrededor del triángulo equilátero. Con centro en B y radio BA se traza el arco AF, posteriormente con centro en A y radio AF se traza FF’; a continuación, el centro se cambia para C y con radio CF’ se traza F’F’’, a partir de este arco el proceso de repite tomando como dentro B.



La espiral de cuatro centros: sigue un procedimiento análogo a las anteriores, pero alrededor de un cuadrado, como se ilustra en la imagen, se deja al lector que analice el proceso de construcción.



La espiral de cinco puntos: es más compleja en su trazado, principalmente en el momento de seleccionar los lados a prolongar mediante las semirrectas que constituirán los límites de cada arco alrededor del pentágono.

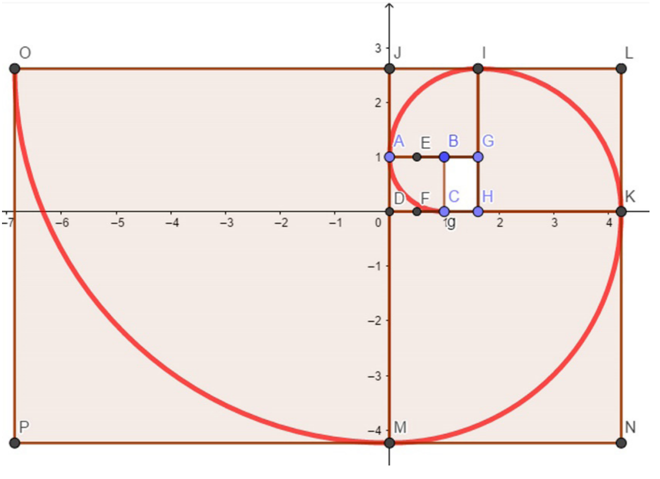


La espiral áurea de Durero[lviii]: Con más de dieciocho siglos después del descubrimiento de las primeras espirales, Alberto Durero (1471-1528) proporcionó un método para dibujar un complejo tipo de espiral basada en el crecimiento gnómico, es decir, el método por el cual se encajan las figuras geométricas y se unen sus vértices. La influencia de saber griego (en el cual todo había de poder representarse con regla y compás) en Durero marcaron la forma que obtuvo el método para resolver la espiral áurea, las cuales son espirales que tienen relación con el número áureo (también llamado número de oro, razón extrema y media, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción) es un número irracional, representado por la letra griega φ (phi) (en minúscula) o Φ (Phi) (en mayúscula) en honor al escultor griego Fidias[lix].

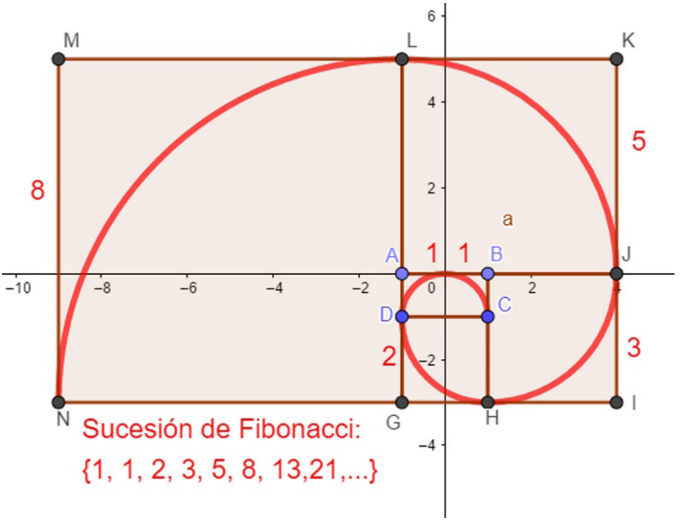
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887498948$$

Se construyen, partiendo de un rectángulo ABHD, en el que AD=1 y AG sea igual al número de oro. Una vez hecho este paso se traza un cuadrado con el lado AG que llamamos AJIG. De esta forma, se consigue un cuadrado de lados 1 y el número áureo.

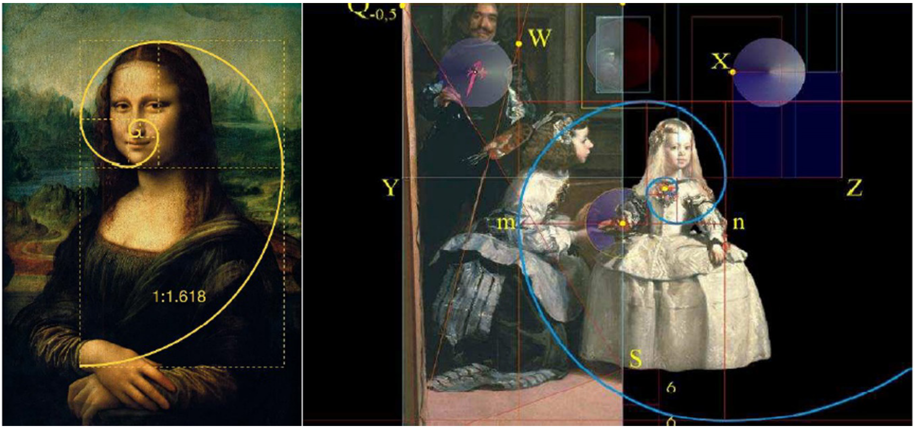
Por el mismo procedimiento se construye el cuadrado IHKL. Se continúa el proceso reiteradamente de forma que en cada rectángulo se quita el mayor cuadrado posible: la espiral áurea es la formada por los cuadrantes de los círculos inscritos en cada cuadrado. Las diagonales del primer rectángulo, el rectángulo mayor, se corta en un punto que es punto límite de la espiral áurea.



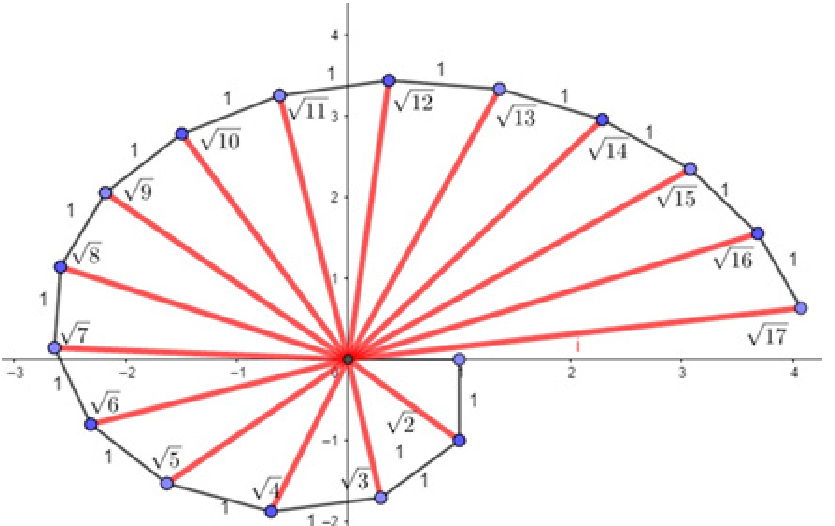
La espiral de Fibonacci: Cumple con las condiciones de la espiral áurea, pero se desarrolla dentro de cuadrados que tienen por longitudes de lados los números de la sucesión de Fibonacci: donde a partir de los números 1,1 los demás se obtienen sumando los dos anteriores.



Por su relación con el llamado número áureo y la "divina proporción" se ha empleado mucho en la pintura en la imagen aparece el famoso cuadro de "La Mona Lisa" del pintor renacentista italiano Leonardo da Vinci[lx] donde se muestra la pintura enmarcada en una epiral áurea y el cuadro "Las Meninas" de Diego de Silva Velázquez[lxi], máximo representante de la pintura barroca española, quien utilizó la espiral en la estructura de su obra. En este caso de composición espiralada, la espiral nace en el centro del pecho de la Infanta Margarita de Austria[lxii], es decir; en su propio esternón. "Simbólicamente, este punto medio y anatómico del cuerpo de la Infanta Margarita de Austria, marca el centro reservado de los elegidos, tal y como en la tradición europea el Emperador se situaba, siempre, en el lugar central en las ceremonias".



La espiral de Teodoro de Cirene[lxiii]: Esta esperial difiere de las anteriores porque su propósito no fue dibujar una espiral, sino determinar las raíces de un conjunto de números, para ello el matemático utiliza el Teorema de Pitágoras y añadiendo perpendicularmente a un segmento una unidad lo que forma triángulos cuyas hipotenusas son las sucesivas raíces gráficamente como se muestra en la imagen adjunta generada con GeoGebra.



De espirales dibujadas con regla y compás pasaremos a espirales obtenidas a partir de sus ecuaciones:

La espiral de Arquímedes: es una curva plana trascendente que se describe por un movimiento uniforme de un punto M, que se desplaza sobre una recta R de un plano, que gira uniformemente alrededor de un punto O que pertenece a dicha recta. Es decir, el radio varía de manera proporcional al ángulo girado. En el inicio del movimiento el punto M coincide con el centro de rotación O. es una línea continua e ilimitada, con un punto singular inicial en el origen. O sea, los puntos M recorren con una velocidad constante el eje OX del plano, girando este eje alrededor del punto O con una velocidad angular constante. Cuando el eje OX da un giro de 360°, el punto M se desplaza sobre el eje OX a una distancia , denominada paso de la espiral.

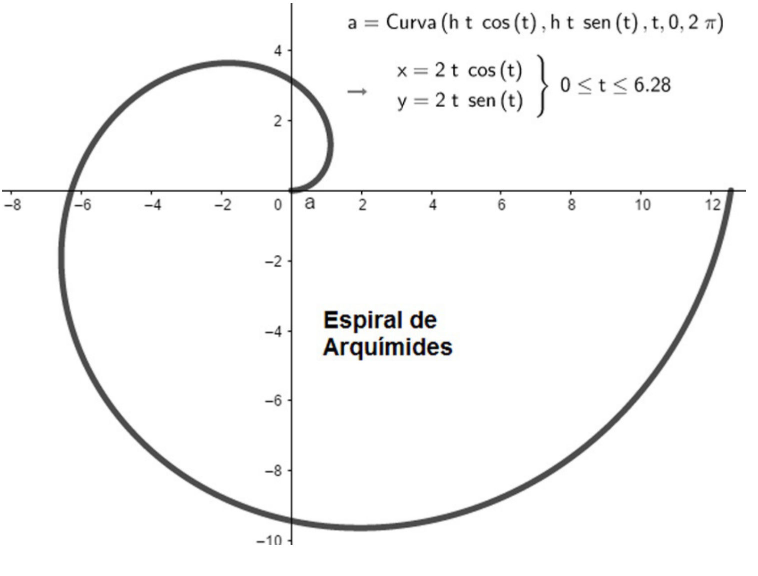
Su ecuación cartesiana es: $\sqrt{x^2+y^2} = b * \arctan\frac{y}{x}$

Su ecuación paramétrica es $r=a+b\theta$

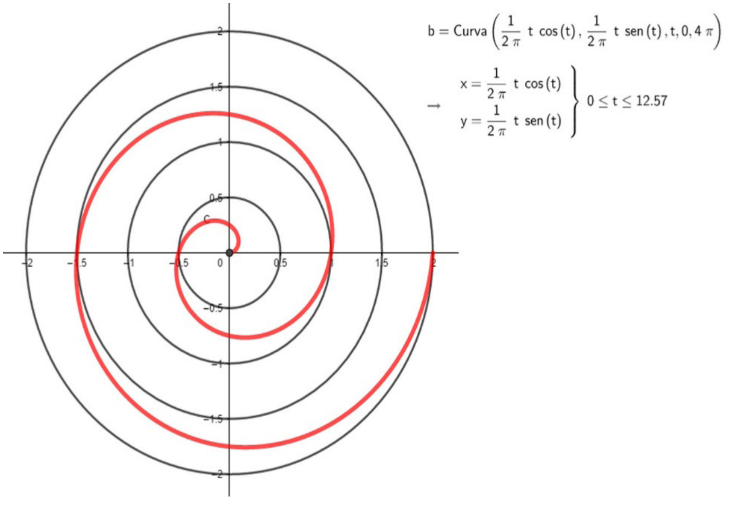
La expresión paramétrica en GeoGebra se ha expresado por:

Curva(h t cos(t),h t sen(t),t,0,2π)

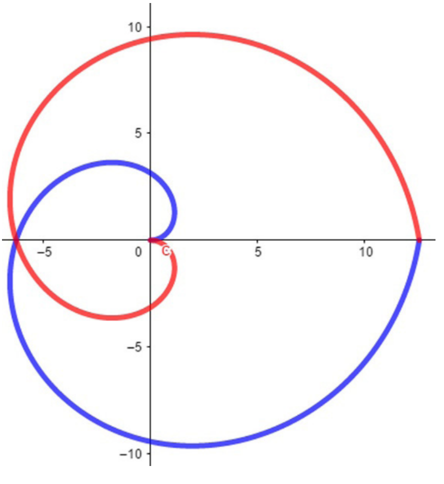
En este caso h representa un deslizador que ofrece la aplicación para obtener una familia de curvas, en el caso que se muestra h=2.



La espiral de Arquímedes se puede trazar dentro de una circunferencia y conforme va creciendo se va alejando un arco de otro en vueltas sucesivas de la misma tienen distancias de separación constantes (iguales a $2\pi b$ si θ es medido en radianes), como se ilustra en la siguiente gráfica:

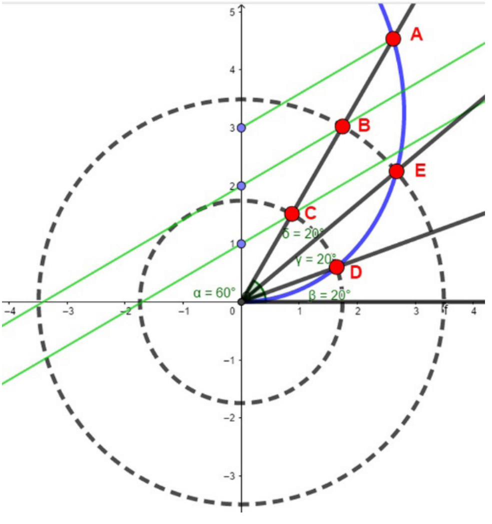


En realidad, la espiral de Arquímedes tiene dos brazos, uno para $\theta > 0$ y otro para $\theta < 0$. Los dos brazos están discretamente conectados en el origen y sólo se muestra uno de ellos en la gráfica. Tomando la imagen reflejada en el eje Y se puede mostrar el otro brazo.



Con todo lo que se ha planteado respecto a la espiral puede que el lector se pregunte sobre su aplicación además de su presencia en la naturaleza y las artes, por eso se planteará el problema de la trisección del ángulo, uno de los problemas clásicos de la antigüedad griega que sobrevivió sin ser resuelto hasta el siglo XIX, junto con la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

El problema de la trisección del ángulo: El problema consiste en encontrar un ángulo cuya medida sea un tercio de otro ángulo dado, utilizando únicamente regla y compás. El problema es sencillo en algunos casos (por ejemplo, si el ángulo dado es recto, puede construirse un ángulo que sea la tercera parte del mismo), pero es imposible de resolver en general, por eso se mostrará cómo hacerlo utilizando la espiral de Arquímedes.

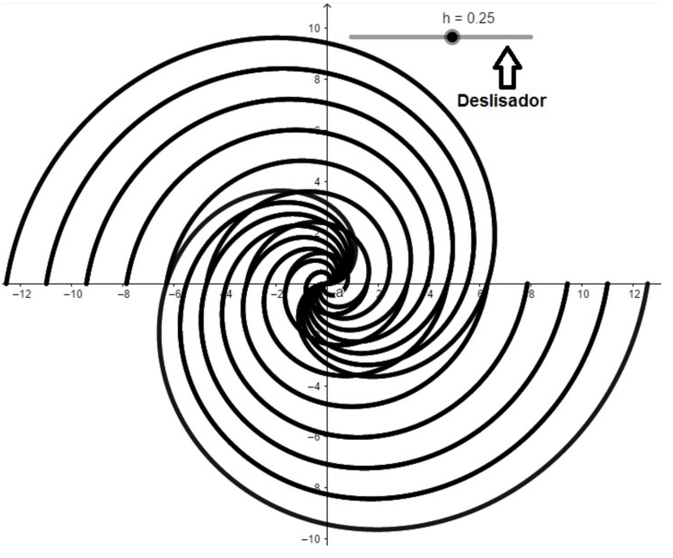


El procedimiento es el siguiente:

1. Se traza un ángulo con vértice en el origen de coordenadas en este caso.
2. Se traza una espiral de Arquímedes (Curva azul) cuyo origen coincide con el vértice del ángulo.
3. Como puede observarse el lado superior del ángulo corta a la espiral en el punto A formando el segmento OA.
4. El segmento OA se divide en tres partes iguales.
5. Con centro el O se trazan dos circunferencias con radios OC y OB.
6. Se determinan los puntos D y E donde cada circunferencia corta a la espiral.
7. Lo puntos D y E son los puntos de trisección del ángulo, formándose en este caso los ángulos .

La gráfica lograda con GeoGebra muestra una familia de espirales de Arquímedes.

La espiral de Arquímedes tiene una gran cantidad de aplicaciones. Por ejemplo, se emplean bombas de compresión o compresores rotativos (scroll pumps), hechos de dos espirales de Arquímedes del mismo tamaño intercaladas, para comprimir líquidos y gases. Este es un mecanismo corriente en máquinas de aire acondicionado con bajas emisiones de ruido.



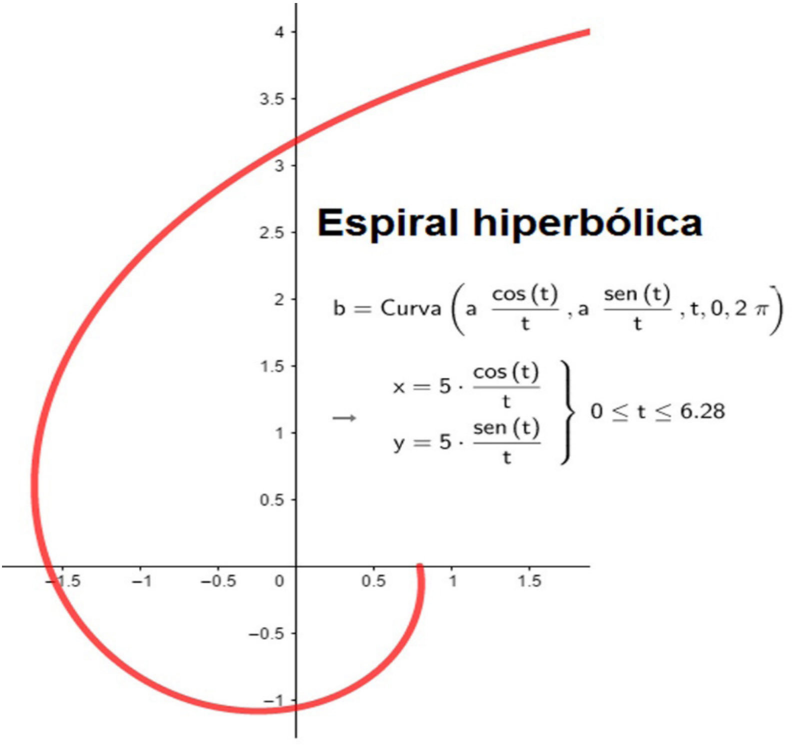
Familia de espirales de Arquímedes lograda con GeoGebra

Gramófono

Los surcos de las primeras grabaciones para gramófonos (Disco de vinilo) forman una espiral de Arquímedes, haciendo los surcos igualmente espaciados y maximizando el tiempo de grabación que podría acomodarse dentro de la grabación (aunque esto fue cambiado posteriormente para incrementar la calidad del sonido).

Pedirle a un paciente que dibuje una espiral de Arquímedes es una manera de cuantificar el temblor humano; esta información ayuda en el diagnóstico de enfermedades neurológicas.

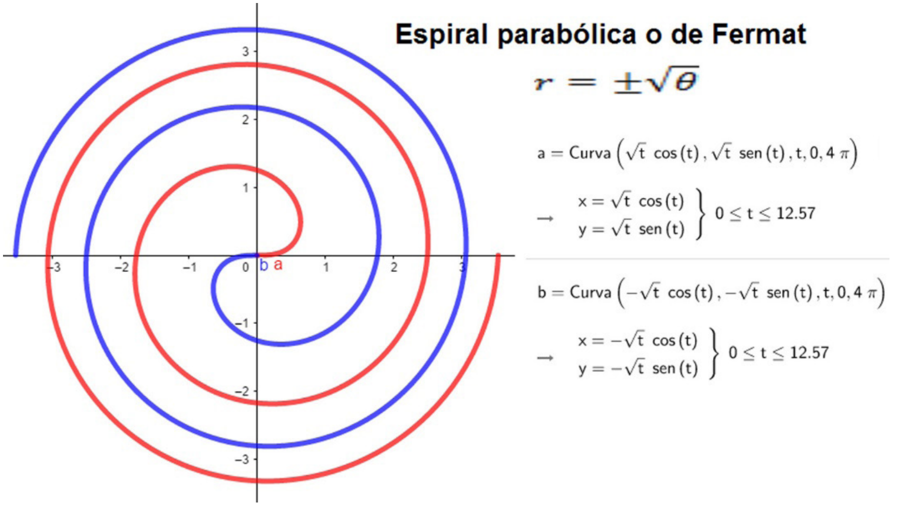
La espiral hiperbólica: es una Curva Plana trascendental, también conocida como espiral recíproca. Se define por la ecuación polar rθ = a, y es la inversa de la espiral de Arquímedes.



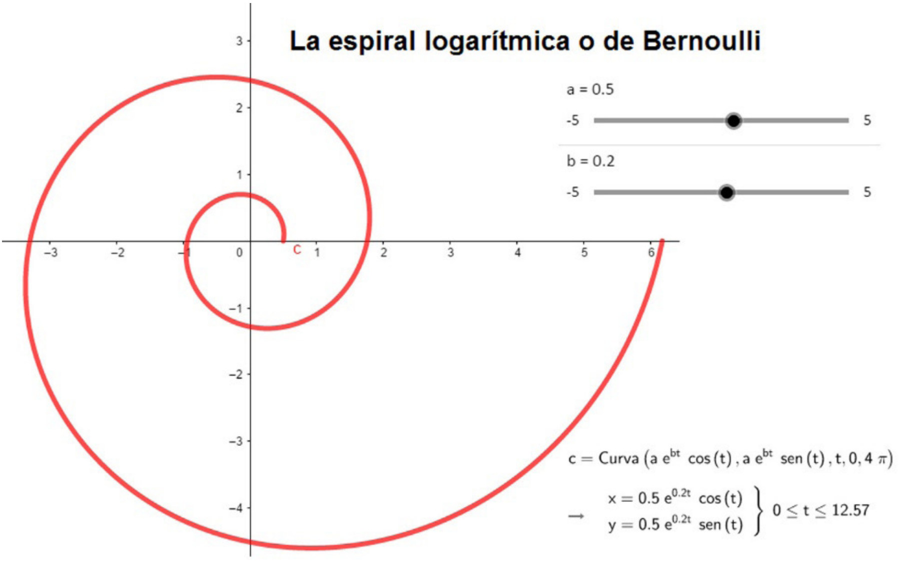
Comienza en una distancia infinita del polo central (para θ comenzando desde cero, r = a/θ comienza del infinito), y se enrolla cada vez más rápidamente mientras se aproxima al polo central, la distancia de cualquier punto al polo, siguiendo la curva, es infinito.

La espiral de Fermat: denominada así en honor de Pierre de Fermat y también conocida como espiral parabólica, es un caso particular de la espiral de Arquímedes. y responde a la siguiente ecuación:

$$r = \pm\sqrt{\theta}$$



La espiral logarítmica o de Bernoulli, espiral equiangular o espiral de crecimiento es una clase de curva espiral que aparece frecuentemente en la naturaleza. Fue descrita por primera vez por Descartes[lxiv] y posteriormente investigada por Jakob Bernoulli[lxv].



Como ya se presentó esta importante espiral contemos la historia con más calma; después que Durero planteó su espiral áurea pasó aproximadamente un siglo y con la aparición y el desarrollo del cálculo diferencial e integral de Newton y Leibniz fue posible el estudio de las curvas hasta alcanzar su momento de gloria. Y dentro de estas curvas una muy especial y al mismo tiempo muy habitual en la naturaleza: la espiral equiangular, logarítmica o geométrica.

Aunque Descartes y Torricelli[lxvi] habían iniciado su estudio, les faltaba la potente herramienta del cálculo para poder rematarlo. Este honor le va corresponder a Jakob Bernouilli en los albores del siglo XVIII.

René Descartes (1596-1648), un año después de la publicación de La Géométrie, se va encontrar con la curva mecánica que responde al problema planteado por Galileo sobre la trayectoria de caída de un cuerpo a través de una tierra en rotación. Esta trayectoria le llevó a Descartes hasta la espiral equiangular o logarítmica.

Su ecuación es de la forma

$$r = a\, e^{b\theta}$$

donde a y b son constantes y e es el número e=2,71828182..., r el radio de posición de un punto y theta el ángulo girado.

Es decir, el radio de posición en un punto no depende de forma lineal, uniformemente, del ángulo girado. Su dependencia es exponencial.

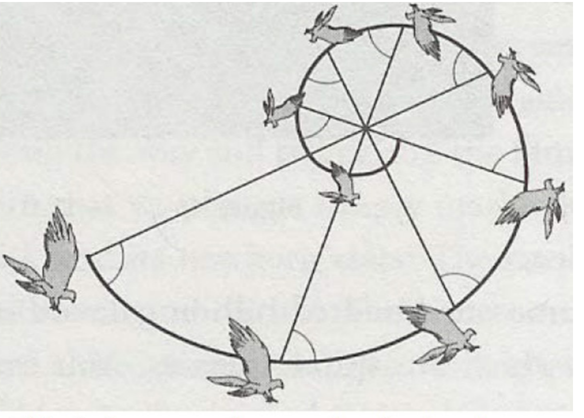
Según vayamos girando alrededor del origen la curva se va ir alejando del origen de forma cada vez más rápida. Fue Torricelli, utilizando métodos semejantes a Arquímedes, quien primero logró calcular su longitud.

Pero, sin duda, al matemático que cautivó el estudio de esta espiral fue a Jacob Bernoulli, quien la bautizó con el nombre de *Spira Mirabilis* (espiral maravillosa), título que dio a su obra dedicada a esta espiral, la que también escogió como emblema para

Lápida de la tumba de Bernoulli observe la espiral en la parte inferior.

su tumba con un epitafio en latín que reza: "*Eadem mutata resurgo"* ("*Mutante y permanente, vuelvo a resurgir siendo el mismo*"); pero desgraciadamente, por una equivocación o desconocimiento del grabador, la que se grabó en su lugar fue una espiral de Arquímedes.

Las cámaras de la concha de un nautilus forman una espiral aproximada a una espiral logarítmica.

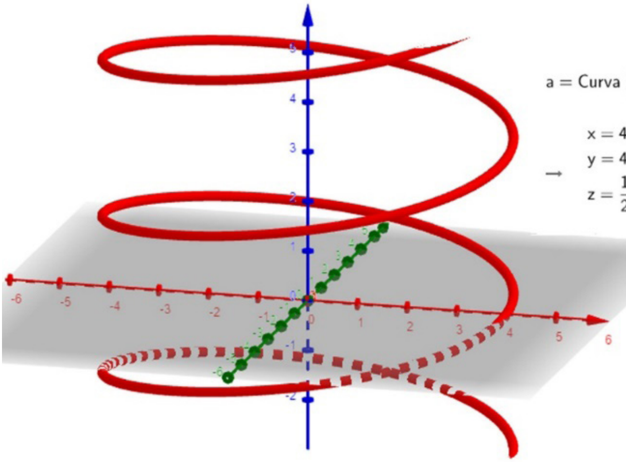


El halcón peregrino vuela siguiendo un recorrido aproximado al de una espiral logarítmica

OTRAS ESPIRALES EN LA NATURALEZA

10.3. Pasemos del plano al espacio

El nuevo concepto es el de hélice: Una hélice, en geometría, es el nombre que recibe toda línea curva cuyas tangentes forman un ángulo constante (α), siguiendo una dirección fija en el espacio. Mediante GeoGebra partiendo de este concepto se tiene el siguiente gráfico:



$$a = \text{Curva}\left(4\cos(t), 4\,\text{sen}(t), \frac{1}{2}t, t, -30, 30\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 4\cos(t) \\ y &= 4\,\text{sen}(t) \\ z &= \frac{1}{2}t \end{aligned}\right\} -30 \leq t \leq 30$$

La hélice tiene múltiples aplicaciones en nuestra vida práctica:

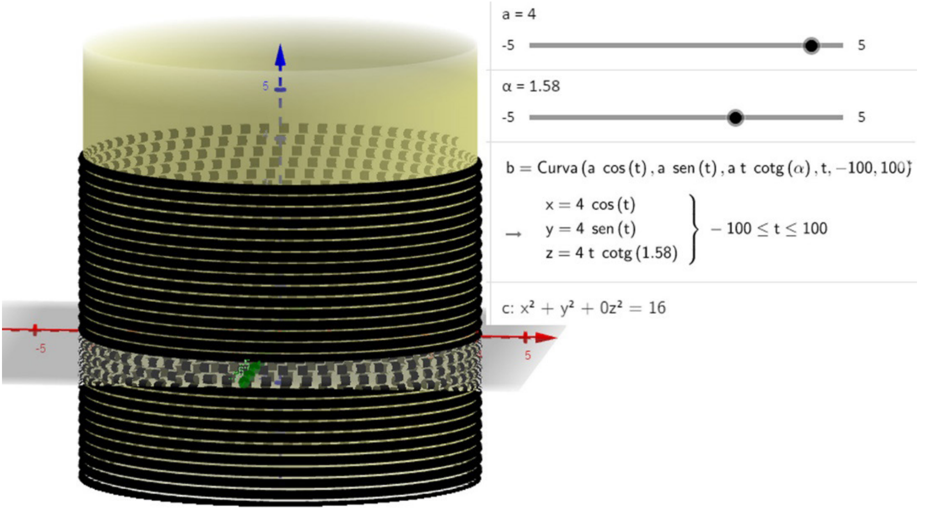
Resortes

Tornillos

La ecuación general de la hélice cilíndrica se expresa mediante las ecuaciones:

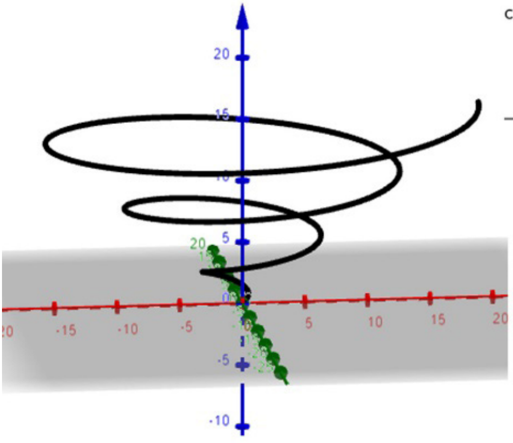
$$\begin{cases} x = a\,cos(t), \\ y = a\,sen(t) \\ z = a\,t\,cotg(\alpha) \end{cases}$$

Donde α es el ángulo constante de corte entre la curva y las generatrices y a un parámetro que controla el tamaño del cilindro. Una generación donde aparecen todos estos parámetros con GeoGebra es la siguiente:



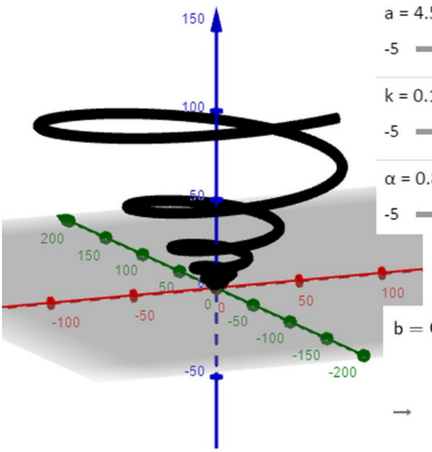
La hélice cónica tiene por ecuaciones

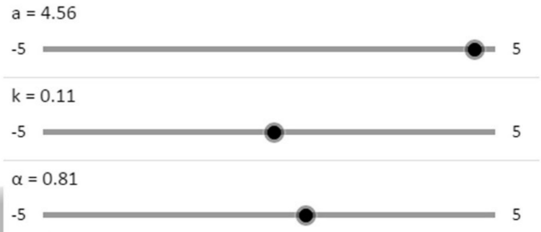
$$\begin{cases} x = ae^{kt}\,cos(t) \\ y = \;ae^{kt}\,sen(t) \\ z = a\,e^{kt}\,cotg(\alpha) \end{cases}$$



$$c = \text{Curva}\left(t\ \cos(t), t\ \text{sen}(t), \frac{t}{\text{tg}(\alpha)}, t, 0, 6\pi\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = t\ \cos(t) \\ y = t\ \text{sen}(t) \\ z = \dfrac{t}{\text{tg}(0.87)} \end{array}\right\} 0 \leq t \leq 18.85$$



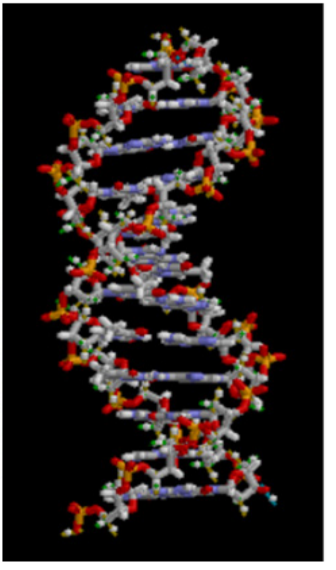


$$b = \text{Curva}\left(a\ e^{kt}\ \cos(t), a\ e^{kt}\ \text{sen}(t), a\ e^{kt}\ \text{cotg}(\alpha), t, -30, 30\right)$$

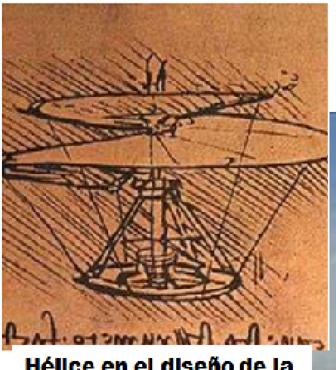
$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4.56\ e^{0.11t}\ \cos(t) \\ y = 4.56\ e^{0.11t}\ \text{sen}(t) \\ z = 4.56\ e^{0.11t}\ \text{cotg}(0.81) \end{array}\right\} -30 \leq t \leq 30$$

Con una ecuación más simplificada se obtiene el siguiente gráfico de una hélice cónica.

Al igual que la espiral la hélice está presente en la naturaleza como se muestra en la siguiente imagen:

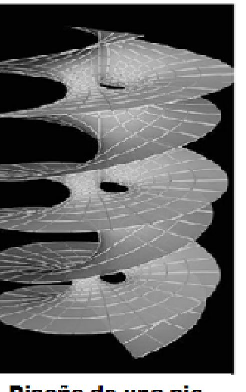


También en la ingeniería y la arquitectura la hélice está presente:



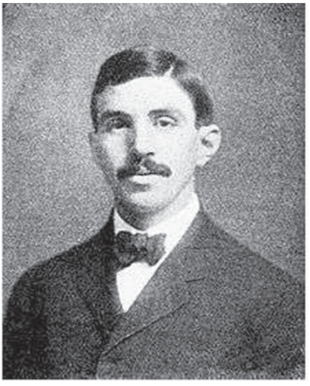
Hélice en el diseño de la máquina voladora de Leonardo da Vinci

Torre The Point es el edificio más alto del Ecuador, ubicado en la ciudad de Santiago de Guayaquil es un icono arquitectónico debido al diseño en espiral de su estructura.

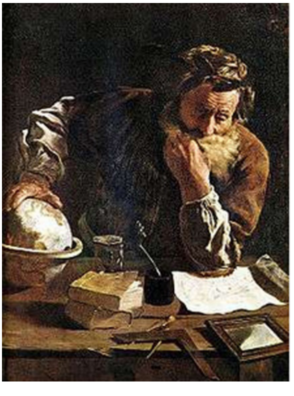


Diseño de una pieza con formato de helicoide

Notas al final

i 

Edward Kasner (2 de abril de 1878–7 de enero de 1955) matemático norteamericano. Llegó a ser profesor emérito Adrián del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Columbia, y fue el primer judío en lograr ese honor en la sección de ciencias de dicha institución. Su principal campo de investigación fue la geometría diferencial en el espacio euclídeo. Analizó sus aplicaciones no sólo en la mecánica, sino también en las proyecciones estereográficas y en la cartografía. Escribió artículos sobre el empaquetamiento de círculos y sobre el ángulo de contacto (horned angle, en inglés), y estudió una extensión de los triángulos rectángulos hacia el plano complejo. Sus exposiciones sobre matemáticas elementales lo hicieron popular entre los no matemáticos y sin dudas, su mayor fama lo obtuvo ser el creador del concepto relacionado con el número gúgol (googol, en el original en inglés), con el objeto de explicar lo ingente del infinito a través de un número tan grande que es inimaginable pero que, sin embargo, no se acerca siquiera al infinito.

ii 

Arquímedes de Siracusa (en griego: **Ἀρχιμήδης Arkhimḗdēs**; Siracusa (Sicilia), ca. 287 a. C.-ibídem, ca. 212 a. C.). Físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático griego. Es considerado uno de los científicos más importantes de la Antigüedad clásica. Aportó a la física los fundamentos de la hidrostática, la estática y la explicación del principio de la palanca. Diseño máquinas como armas de asedio y el tornillo que lleva su nombre. En matemática fue el más grandes de la antigüedad y no se exagera si se considera que también lo fue de toda la historia. A él se debe el método exhaustivo para calcular el área bajo el arco de una parábola con el sumatorio de una serie infinita, y dio una aproximación extremadamente precisa del número pi. También definió la espiral que lleva su nombre, fórmulas para los volúmenes de las superficies de revolución y un ingenioso sistema para expresar números muy largos. Murió durante el sitio de Siracusa (214-212 a. C.), cuando fue asesinado por un soldado romano, a pesar de que existían órdenes de que no se le hiciese ningún daño

iii 

Siracusa (Sarausa en siciliano) es una ciudad de Italia, situada en la costa sudeste de la isla de Sicilia, en el Mediterráneo central, famosa como centro cultural desde la Antigua Grecia.

iv ***El contador de arena*** (en griego: Αρχιμήδης Ψαμμίτμς, *Arquímedes Psammites*). Obra de Arquímedes en la que el autor intenta establecer un límite superior para el número de granos de arena necesarios para llenar el universo. Para ello estimo el tamaño del universo según el modelo vigente en ese momento y, además, inventó una manera de expresar números muy grandes. En latín el trabajo se conoce como ***Archimedis Syracusani arenarius et Dimensio Circuli***, cuya traducción tiene unas 8 páginas.

v Arquímedes dedica su tratado a **Gelon II**, (antes de 266 aC - 216 aC) hijo mayor de Hierón II, rey de Siracusa y aunque e se dirige a él por el título de rey, este nunca fue rey, incluso murió antes que su padre.

vi

Botsuana: Nombre oficial es República de Botsuana; país soberano sin salida al mar del sur de África cuya forma de gobierno es la república parlamentaria. Su territorio está dividido en nueve distritos. La capital del país es la ciudad de Gaborone. Geográficamente el país se extiende sobre terreno llano, con un 70 % de su superficie cubierta por el desierto de Kalahari. Limita con Sudáfrica al sur y sureste, con Namibia al oeste y al norte, con Zimbabue al noreste y al norte con Zambia en un solo punto. Ocupa el puesto 48 en países por superficie.

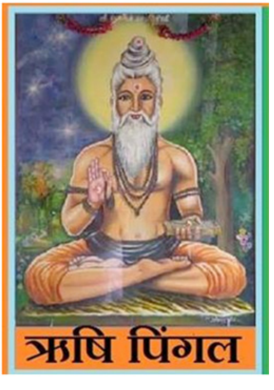
vii

Namibia: En inglés y oficialmente: *Republic of Namibia*, es un país del suroeste de África que ocupa el territorio de lo que fue conocido hasta la década de 1960 como África del Suroeste, limitando al norte con Angola, al noreste con Zambia, al oeste con el océano Atlántico, al este con Botsuana, y al sureste y al sur con Sudáfrica. Es un país del suroeste de África que ocupa el territorio de lo que fue conocido hasta la década de 1960 como África del Suroeste, limitando al norte con Angola, al noreste con Zambia, al oeste con el océano Atlántico, al este con Botsuana, y al sureste y al sur con Sudáfrica. Su capital y ciudad más poblada es Windhoek.

viii 

Hotentotes es el nombre con el que se conoce generalmente la etnia **khoikhoi** ("hombres de los hombres"), simplemente **khoi** (o joi), son un pequeño grupo étnico nómada del África del sudoeste, específicamente de Botsuana y Namibia, que se separó de los **khoisan** y llegó desde el sur a esta región a principios del siglo VI. **Khoekhoen = Khoikhoi = Kwena** son nombres usados por ellos mismos, significa hombres de hombres u hombres reales con animales domésticos, distintos a los **Sonqua** (**san**) que no los tenían.

ix **Grupo Local:** Se denomina así al cúmulo de galaxias en el que se encuentra la Vía Láctea. Debido a gran distancia a otros grupos más allá del Grupo Local la expansión del universo separa continuamente los grupos, se estima que sea el límite al cual el ser humano pueda aspirar llegar en un futuro, pues el resto del universo se alejaría a mayor velocidad que la que se puede cursar con la tecnología actual.

x 

Pingala (पिङ्गल) matemático indio natural del actual estado de Kerala, en la India. Se creía que vivió en el siglo VII a. C., pero según la tradición, Pingala habría sido el hermano menor de Pāṇini, el gran gramático indio del siglo V a. C., por lo que hubo que situar a Pingala dos o tres siglos más tarde, es el autor del Chanda-shastra, un libro escrito en sánscrito acerca de las métricas, o sílabas largas, en él presentó la primera descripción conocida de un sistema de numeración binario.

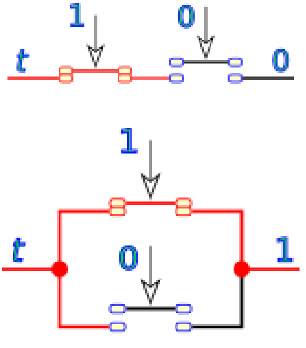
xi

Francis Bacon (Strand (Londres), 22 de enero de 1561-Highgate, Middlesex, 9 de abril de 1626) filósofo, político, abogado y escritor inglés, padre del empirismo filosófico y científico. Rompió con la escolástica e introdujo en filosofía el método experimental, pero su obra mantiene aún vínculos con la alquimia y una cierta tradición esotérica renacentista.

xii

George Boole (Lincoln, Lincolnshire, Inglaterra, 2 de noviembre de 1815 - Ballintemple, Condado de Cork, Irlanda, 8 de diciembre de 1864) matemático y lógico británico. Creador del álgebra que lleva su nombre, con ellos nace una ciencia o rama de la lógica separada ya de la filosofía y unida a las matemáticas.

xiii



Algebra de Boole: estructura algebraica que esquematiza las operaciones lógicas Y, O, NO y SI (AND, OR, NOT, IF), así como el conjunto de operaciones unión, intersección y complemento y constituyó el primer jalón del camino que condujo al álgebra abstracta. Más tarde, el álgebra de Boole contribuiría también al diseño de los primeros ordenadores. En el esquema se muestra un circuito en serie que se corresponde con la operación Y, mientras que el circuito en paralelo simula la operación O.

xiv

Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1 de julio 1646 en Leipzig, Saxony (Ahora Alemania)- 14 noviembre 1716 en Hannover, (Ahora Alemania)). Hijo de un profesor de filosofía moral en Leipzig. Aprendió él mismo latín y algo de griego a la edad de 12 años, para así poder leer los libros de su padre. Desde 1661 al 1666 estudió leyes en la Universidad de Leipzig. En 1666 le fue rechazado el ingreso para continuar con un curso de doctorado, y fue a la Universidad de Altdorf, recibiendo su doctorado en leyes en el 1667. Continuó su carrera de leyes trabajando en la corte de Mainz hasta 1672. En ese año visitó París para tratar de disuadir a Luis XIV del ataque al territorio alemán. Permaneció en París hasta 1676, donde continuó practicando leyes. Sin embargo, en París estudió matemáticas y física. Fue durante este periodo que las características fundamentales del cálculo fueron desarrolladas. Fue un verdadero precursor de la lógica matemática

Las ideas de Leibniz, que contiene muchos conceptos de la lógica simbólica de hoy, no tuvieron entonces mayor influencia, pues quedaron inéditas hasta el siglo XX. Iguales destinos tuvieron ideas semejantes esbozadas durante el siglo XVIII y comienzos del XIX. Agreguemos que las ideas de Kant, de gran influencia en su tiempo y para quien no era necesaria “ninguna nueva invención en la lógica”, han contribuido sin duda al estancamiento de esta disciplina. Las cosas cambiaron cuando llegó Boole, el cual se convirtió en el verdadero fundador de la lógica simbólica. El resto de su vida desde 1676 hasta su muerte, permaneció en Hanover. El 21 de noviembre de 1675 escribió un manuscrito usando por primera vez la notación de la integral ò f(x)*d(x). En el mismo manuscrito estaba dada la regla para la diferenciación.

xv 

Kerala es uno de los veintinueve estados que, junto con los siete territorios de la Unión, forman la Republica de la India. Su capital es Thiruvananthapuram (Trivandrum). Está ubicado en el extremo sur del país, limitando al norte con Karnataka, al este con Tamil Nadu y al oeste con el mar de Laquedivas o mar Arábigo (océano Índico), coincidente con la costa de Malabar . Con 38 863 km^2 es el octavo estado menos extenso y con 859 hab/km^2, es el tercero más densamente poblado, por detrás) de la India. Aparte, es también el estado con menos pobreza. Se lo conoce por ser el más alfabetizado del país, con una tasa de más del 90%. El idioma oficial es el malabar, aunque también existe un numeroso grupo de hablantes de tamil.

xvi **Pāṇini** (Shalatura, fl. siglo IV a. C.) fue un eminente gramático sánscrito de la India antigua. Con seguridad, fue el gramático más célebre y más frecuentemente citado de los antiguos gramáticos de la India. **Pāṇini** vivió en Gandhara, después de la época de Buda (420–368 a. C.) y antes de la primera mención de la muerte de **Pāṇini** (por un león), en el Pancha-tantra (hacia el 200 a. C.). Se le considera un inspirado muni (‘pensador’, siendo mauná: ‘silencio’)

xvii 

Iván Matvéyevich Vinográdov (Иван Матвеевич Виноградов: 14 de septiembre de 1891 – 20 de marzo de 1983) matemático ruso, uno de los creadores de la teoría analítica de números moderna y una figura dominante de la matemática soviética. Graduado de la Universidad Estatal de San Petersburgo, donde empezó a ejercer en 1920 de profesor. Estuvo directamente ligado a la escuela de teoría de números de Petersburgo, a la que pertenecieron matemáticos como Chébishev y Zolotariov.

A partir de 1934 fue director del Instituto Steklov de Matemáticas, un cargo que conservó el resto de su vida, exceptuando el quinquenio 1941–1946, en que el instituto fue dirigido por el académico Sergéi Lvóvich Sóbolev.

xviii

Eratóstenes (c. 284-c. 192 a.C.), matemático, astrónomo, geógrafo, filósofo y poeta griego. Midió la circunferencia de la Tierra con una precisión extraordinaria al determinar, a través de la astronomía, la diferencia de latitud entre las ciudades de Siena (actual Asuán) y Alejandría, en Egipto. Nació en Cirene (en la actualidad Shaḩḩāt, Libia). Entre sus maestros se encontraba el poeta griego Calímaco de Cirene. Hacia el 240 a.C., Eratóstenes llegó a ser el director de la Biblioteca de Alejandría. Sus cálculos sobre la circunferencia terrestre se basaron en la observación que hizo en Siena, su ciudad natal; a mediodía, en el solsticio de verano, los rayos del sol incidían perpendicularmente sobre la tierra y, por tanto, no proyectaban ninguna sombra (Siena estaba situada muy cerca del trópico de Cáncer). En Alejandría se percató de que en la misma fecha y hora las sombras tenían un ángulo de aproximadamente 7° con respecto a la vertical. Al conocer la distancia entre Siena y Alejandría, pudo hallar a través de cálculos trigonométricos la distancia al Sol y la circunferencia de la Tierra. Eratóstenes también midió la oblicuidad de la eclíptica (la inclinación del eje terrestre) con un error de sólo 7’ de arco, y creó un catálogo (actualmente perdido) de 675 estrellas fijas. Su obra más importante fue un tratado de geografía general y nos legó su famosa criba para determinar los números primos. Tras quedarse ciego, murió en Alejandría por inanición voluntaria.

xix

Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francés, nacido en Beaumont-de-Lomagne, que anticipó el cálculo diferencial con su método de búsqueda de los máximos y mínimos de las líneas curvas. En su juventud, con su amigo el científico y filósofo Blaise Pascal, realizó una serie de investigaciones sobre las propiedades de los números. De estos estudios, Fermat dedujo un importante método de cálculo de probabilidades. También se interesó por la teoría de números y realizó varios descubrimientos en este campo. Por estas aportaciones hubo quien le consideró el padre de la teoría moderna.

xx

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemán conocido por sus muy diversas contribuciones a la astronomía, las matemáticas y la física, especialmente por sus estudios del electromagnetismo. Nació en Brunswick el 30 de abril de 1777, en el seno de una familia humilde. Estudió lenguas antiguas, aunque ya desde muy pequeño mostró unas excepcionales aptitudes para las matemáticas, especialmente en los procesos en los que había que efectuar cálculos numéricos. Según él mismo decía, siendo ya adulto, aprendió a contar antes que a leer. Consciente de su talento, el duque de Brunswick le concedió una beca que le permitió seguir estudiando e ingresar en el Colegio Carolino de Brunswick. Durante los tres años que permaneció en dicho centro, redescubrió la ley de Bode, el teorema del binomio y la media aritmética-geométrica, así como la ley de reciprocidad cuadrática y el teorema de los números primos.

A los 18 años intentó dar una solución al problema clásico de la construcción de un heptágono (figura de siete lados) regular, con una regla y un compás. No solamente consiguió probar que esto era imposible, sino que siguió aportando métodos para construir figuras de 17, 257 y 65.537 lados. Durante estos estudios, probó que la construcción, con regla y compás, de un polígono regular con un número de lados impar sólo era posible cuando el número de lados era un número primo de la serie 3, 5, 17, 257 y 65.537 o un producto de dos o más de estos números. A raíz de este descubrimiento abandonó sus estudios de lenguas y se dedicó a las matemáticas. Estudió en la Universidad de Gotinga desde 1795 hasta 1798, doctorándose por la Universidad de Helmstedt en 1799; para su tesis doctoral presentó una prueba de que cada ecuación algebraica tiene al menos una raíz o solución. Este teorema, que ha sido un desafío para los matemáticos durante siglos, se sigue denominando teorema fundamental del álgebra.

xxi

Marin Mersenne, Marin Mersennus o le Père Mersenne (Oizé, 8 de septiembre de 1588 – París, 1 de septiembre de 1648) Sacerdote, matemático y filósofo francés del siglo XVII que estudió diversos campos de la teología, matemáticas y la teoría musical. Nacido en una familia de campesinos fue educado en la universidad jesuita de La Flèche, donde conoció y frecuentó la amistad de René Descartes. El 17 de julio de 1611 se hizo miembro de los Mínimos, dedicándose al estudio de la teología y el hebreo. Después de este período recibió la orden sacerdotal en París en 1613.

Tras su consagración estuvo un tiempo enseñando filosofía y teología en Nevers, pero en 1620 regresó a París. Allí entró en el convento de L'Annonciade donde estudió matemáticas y música. Tuvo una nutrida correspondencia con diversos eruditos de Francia, Italia, Inglaterra y Holanda, tales como Pierre de Fermat, Galileo Galilei, Giovanni Doni y Christiaan Huygens. Desde 1620 hasta 1623 se dedicó exclusivamente a escribir en materia de filosofía y teología.

Hoy día, Mersenne es recordado principalmente gracias a los números que llevan su nombre: los números primos de Mersenne. También es cierto que tradujo y comentó las obras de Euclides, Arquímedes y otros matemáticos griegos, y que su contribución más señalada al avance del conocimiento fue realizada a través de una extensa correspondencia (por supuesto en latín) con matemáticos y otros científicos de diversos países. Sin embargo, Marin Mersenne no fue principalmente matemático. En realidad, empezó escribiendo sobre teología y filosofía, pero también fue un gran tratadista sobre teoría musical y sobre otros temas diversos.

Sus obras filosóficas se caracterizan por una gran erudición y por la ortodoxia teológica más estricta. Su mayor servicio a la filosofía fue su entusiasta defensa de Descartes, de quien fue consejero y amigo en París y a quien visitó en su exilio en Holanda. Remitió a varios pensadores eminentes de París una copia manuscrita de las cartesianas *Meditations*, y defendió su ortodoxia frente a los numerosos críticos que aparecieron entre el clero de la época.

Más tarde, dejó el pensamiento especulativo y se dedicó a la investigación científica, especialmente en temas como las matemáticas, la física y la astronomía. Entre las obras relacionadas con este período la más conocida es la traducción de *L'Harmonie universelle* (1636) en la que se trata la teoría musical y los instrumentos musicales.

xxii **Derrick Norman Lehmer** (27 de julio de 1867, Somerset, Indiana, EE. UU.) fue un matemático estadounidense que investigó en los números teóricos. Educado en la Universidad de Nebraska, obtuvo un título de licenciatura en 1893 y maestría en 1896; galardonado con el doctorado de la Universidad de Chicago en 1900 fue nombrado instructor en matemática en la Universidad de California en Berkeley en 1900. Fue ascendido a profesor en Berkeley en 1918 y continuó enseñando allí hasta su retiro en 1937. Publicó tablas de números primos y de factores primos, alcanzando 10.017 millones en 1909.

xxiii 

Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar. Euler nació en Basilea y estudió en la Universidad de Basilea con el matemático suizo Johann Bernoulli, licenciándose a los 16 años. En 1727, por invitación de la emperatriz de Rusia Catalina I, fue miembro del profesorado de la Academia de Ciencias de

San Petersburgo. Fue nombrado catedrático de física en 1730 y de matemáticas en 1733. En 1741 fue profesor de matemáticas en la Academia de Ciencias de Berlín a petición del rey de Prusia, Federico el Grande. Euler regresó a San Petersburgo en 1766, donde permaneció hasta su muerte. Aunque obstaculizado por una pérdida parcial de visión antes de cumplir 30 años y por una ceguera casi total al final de su vida, Euler produjo numerosas obras matemáticas importantes, así como reseñas matemáticas y científicas.

[xxiv]

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (Berlín, 27 de julio de 1871 – 21 de mayo de 1953) fue un lógico y matemático alemán. Cursó sus estudios secundarios en Berlín de donde regresó en 1889. Después estudió matemática, física y filosofía en las universidades de Berlín, Halle y Friburgo de Brisgovia. En 1894 finalizó su doctorado y fue premiado por la Universidad de Berlín por su disertación sobre el cálculo de variaciones.

Zermelo permaneció en la Universidad de Berlín siendo nombrado ayudante de Planck y bajo su guía comenzó a estudiar hidrodinámica.

En 1897 se dirigió al centro más importante para la investigación matemática en el mundo, la Universidad de Gotinga donde completó su tesis en 1899. En 1900 Zermelo estaba en la conferencia del Congreso Internacional de Matemáticos en París cuando David Hilbert desafió a la comunidad matemática con sus famosos 23 problemas fundamentales no resueltos, que los matemáticos debían atacar durante el siglo entrante. El primero de estos problemas era la hipótesis del continuo introducida por Cantor en 1878; Zermelo comenzó a trabajar en los problemas de teoría de conjuntos y en 1902 publicó su primer trabajo sobre la adición de cardinales transfinitos. En 1904, dio con éxito el primer paso sugerido por Hilbert para la hipótesis del continuo, cuando probó el teorema del buen orden ("cada conjunto puede estar bien ordenado'"). Este resultado le otorgó fama a Zermelo, que fue nombrado en Göttingen, en diciembre de 1905. Su prueba del teorema del buen orden, que se basaba en el axioma de elección, no fue aceptada por todos los matemáticos, en parte porque la teoría de conjuntos carecía de una axiomatización en ese tiempo. En 1908, Zermelo logró una prueba que tuvo una acogida más amplia.

En 1905 comenzó a axiomatizar la teoría de conjuntos; en 1908 publicó sus resultados a pesar de haber fallado en probar la consistencia de su sistema axiomático.

Hay que destacar que, en 1922, Adolf Fraenkel y Thoralf Skolem en forma independiente perfeccionaron el sistema axiomático de Zermelo. El sistema resultante, conocido ahora como axiomas de Zermelo-Fraenkel, con diez axiomas, es el más usado para la teoría axiomática de conjuntos.

En 1910 Zermelo dejó Göttingen cuando obtuvo un nombramiento en la cátedra de matemáticas en la Universidad de Zúrich, a la cual renunció en 1916.

Obtuvo una cátedra honoraria en Friburgo de Brisgovia en 1926 pero renunció a ella en 1935 por su desaprobación al régimen de Hitler. Al finalizar la Segunda Guerra Mundial solicitó que le fuera restaurada su posición honoraria en Friburgo de Brisgovia, lo cual se concretó en 1946.

Zermelo murió en Friburgo de Brisgovia, Alemania.

[xxv]

John von Neumann (1903-1957), matemático estadounidense nacido en Hungría, que desarrolló la rama de las matemáticas conocida como teoría de juegos. Nació en Budapest y estudió en Zurich y en las universidades de Berlín y Budapest. Viajó a Estados Unidos en 1930 para unirse al claustro de la Universidad de Princeton. A partir de 1933 se incorporó al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (Nueva Jersey). Adquirió la nacionalidad estadounidense en 1937 y durante la II Guerra Mundial ejerció como asesor en el proyecto de la bomba atómica de Los Álamos. En marzo de 1955 fue nombrado miembro de la Comisión de Energía Atómica de los Estados Unidos.

Von Neumann fue un gran matemático. Destacó por sus aportaciones fundamentales a la teoría cuántica, especialmente el concepto de anillos de operadores (actualmente conocido como álgebra de Neumann) y también por su trabajo de iniciación de las matemáticas aplicadas, principalmente la estadística y el análisis numérico. También es conocido por el diseño de computadoras electrónicas de gran velocidad y en 1952 diseñó la primera computadora que utilizaba un programa archivado flexible, el *MANIAC I*. En 1956, la Comisión de Energía Atómica le concedió el premio Enrico Fermi por sus notables aportaciones a la teoría y al diseño de las computadoras electrónicas.

xxvi **Oskar Morgenstern**, 1902-1977, nacido en Görlitz, Silesia, estudió en las universidades de Viena, Harvard y Nueva York. Miembro de la Escuela Austriaca y avezado matemático, participa en los famosos "Coloquios de Viena" organizados por Karl Menger (hijo de Carl Menger) que pusieron en contacto científicos de diversas disciplinas, de cuya sinergia se sabe que surgieron multitud de nuevas ideas e incluso nuevos campos científicos.

Durante la visita de Morgenstern a la Universidad de Princeton, Adolf Hitler asumió el control de Viena a través de la Anschluss Österreichs y Morgenstern decidió emigrar a Estados Unidos durante la segunda guerra mundial ejerciendo la docencia en Princeton. Allí se encontró con el matemático John von Neumann y colaboraron para escribir el libro la teoría de juegos y el comportamiento económico, publicado en 1944, que es reconocido como el primer libro sobre teoría de juegos

xxvii 
Mijaíl Gorbachov y Ronald Reagan negociaron la reducción de armas nucleares

Guerra fría, disputa que enfrentó después de 1945 a Estados Unidos y sus aliados, de un lado, y al grupo de naciones lideradas por la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), del otro. No se produjo un conflicto militar directo entre ambas superpotencias, pero surgieron intensas luchas económicas y diplomáticas. Los distintos intereses condujeron a una sospecha y hostilidad mutuas enmarcadas en una rivalidad ideológica en aumento.

Los antecedentes se remontan a 1917, cuando los revolucionarios tomaron el poder, creando la Unión Soviética, y declararon la guerra ideológica a las naciones capitalistas de Occidente. Estados Unidos intervino en la Guerra Civil rusa enviando unos 10.000 soldados entre 1918 y 1920 y después se negó a reconocer el nuevo Estado hasta 1933. Los dos países lucharon contra Alemania durante la II Guerra Mundial, pero esta alianza comenzó a disolverse en los años 1944 y 1945, cuando la Unión Soviética controló gran parte de la Europa Oriental y el presidente Truman trató de unificar a Europa Occidental bajo el liderazgo estadounidense. Posteriormente la desconfianza aumentó cuando ambas partes rompieron los acuerdos obtenidos durante la Guerra Mundial.

Estas tensiones comenzaron a disminuir en 1985 cuando llegó al poder en la URSS Mijaíl Gorbachov. Él y Reagan (presidente de Estados Unidos) acordaron reducir la presencia de las superpotencias en Europa y moderar la competencia ideológica en el mundo entero. En mayo de 1997, tuvo lugar la firma de un acuerdo histórico entre Rusia, presidida por Borís Yeltsin, y la OTAN, cuyo secretario general era el español Javier Solana, que permitía la ampliación de este organismo a los países del antiguo bloque soviético sin que aquel Estado lo considerase un acto hostil. Dicho acuerdo, recogido en el Acta fundacional sobre las relaciones mutuas de cooperación y seguridad entre la OTAN y la Federación Rusa (ratificado el 27 de mayo en París), suponía que dicho organismo y dicho Estado dejaban de considerarse adversarios, razón por la cual numerosos analistas lo consideraron el fin definitivo de la Guerra fría.

[xxviii] **Merrill Flood Meeks** (1908 - 1991) fue un matemático estadounidense, que hizo notables aportaciones para el desarrollo de la teoría de juegos, junto con Melvin Dresher, planteó la base del modelo de cooperación y conflicto dilema del prisionero, estando en RAND en 1950 (Albert W. Tucker dio al juego del prisionero su actual interpretación, y por lo tanto el nombre con el que se conoce hoy en día).

xxix

Bertrand Russell, tercer conde de Russell (1872-1970), filósofo, matemático y escritor británico, galardonado con el Premio Nobel de Literatura en 1950. Su énfasis en el análisis lógico repercutió de forma notable en el curso de la filosofía del siglo XX.

Nacido en Trelleck (Gales) el 18 de mayo de 1872, estudió Matemáticas y Filosofía en el Trinity College de la Universidad de Cambridge desde 1890 hasta 1894. Tras graduarse este último año, viajó a Francia, Alemania y Estados Unidos. Posteriormente fue nombrado miembro del consejo de gobierno del Trinity College, centro en el cual había empezado a impartir clases desde su licenciatura. Al tiempo que desde su juventud mostró un acusado sentido de conciencia social, se especializó en cuestiones de lógica y matemáticas, áreas sobre las que dio conferencias en muchas instituciones de todo el mundo. Alcanzó un notable éxito con su primera gran obra, ***Los principios de la matemática*** (1903), en la que intentó trasladar la matemática al área de la lógica filosófica para dotar a ésta de un marco científico preciso. Colaboró durante ocho años con el filósofo y matemático británico Alfred North Whitehead en la elaboración de la monumental obra ***Principia Mathematica*** (3 vols., 1910-1913), en la que se mostraba que esta materia puede ser planteada en los términos conceptuales de la lógica general, como clase y pertenencia a una clase. Este libro se convirtió en una obra maestra del pensamiento racional. Russell y Whitehead demostraron que los números pueden ser definidos como clases de un tipo determinado, y en este proceso desarrollaron conceptos racionales y una notación que hizo de la lógica simbólica una especialización importante dentro del campo de la filosofía.

En su siguiente gran obra, ***Los problemas de la filosofía*** (1912), Russell recurrió a la sociología, la psicología, la física y las matemáticas para refutar las doctrinas del idealismo, la escuela filosófica dominante en aquel momento, que mantenía que todos los objetos y experiencias son fruto del intelecto; Russell, una persona realista, creía que los objetos percibidos por los sentidos poseen una realidad inherente al margen de la mente.

Pacifista convencido, condenó la actitud de los gobiernos que había conducido a la I Guerra Mundial y, por mantener dicha posición, en 1916 fue privado de su puesto académico en Cambridge y encarcelado. Durante los seis meses que permaneció en prisión escribió ***Introducción a la filosofía matemática*** (1919), trabajo en el que combinó las dos áreas del saber que él consideraba inseparables. Una vez finalizada la contienda visitó la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas, y en su libro ***Teoría y práctica del bolchevismo*** (1920) mostró su desacuerdo con la forma soviética de aplicación del socialismo. Consideraba que los métodos utilizados para alcanzar un sistema comunista eran intolerables y que los resultados obtenidos no justificaban el precio que se estaba pagando.

Impartió clases en la Universidad de Pekín (en China) durante dos años (1921-1922) y, tras regresar al Reino Unido, dirigió el Beacon Hill School (1928-1932), escuela privada fundada por él que se caracterizó por la aplicación de innovadores y muy progresistas métodos de enseñanza. Desde 1938 hasta 1944 fue profesor en varias instituciones estadounidenses y fue durante este periodo cuando redactó ***Historia de la filosofía occidental*** (1947). Sin embargo, y debido a sus ideas radicales, la Corte Suprema de Nueva York le prohibió impartir clases en el College de esta ciudad (actual City College de la Universidad de Nueva York) por lo que consideraban sus ataques a la religión contenidos en textos como ***Lo que creo*** (1925) y su defensa de la libertad sexual, manifestada en ***Matrimonio y moral*** (1929).

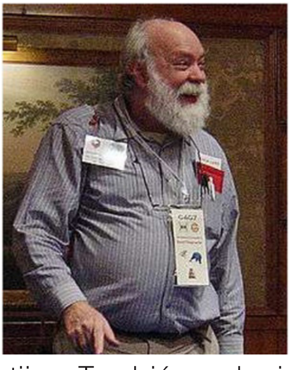
Regresó a su país en 1944 y fue restituido en su puesto del Trinity College. Aunque moderó su pacifismo para apoyar la causa aliada en la II Guerra Mundial, fue un ardiente y activo detractor de las armas nucleares. En 1949 el rey Jorge VI le otorgó la Orden al Mérito. Un año después recibió el Premio Nobel de Literatura y fue calificado como "un campeón de la humanidad y de la libertad de pensamiento". Encabezó un movimiento a finales de la década de 1950 que exigía el desarme nuclear unilateral del Reino Unido y fue encarcelado a los 89 años tras una manifestación antinuclear. Falleció el 2 de febrero de 1970.

(Ginebra, 28 de junio de 1712-Ermenonville, 2 de julio de 1778) fue un polímata suizo francófono. Fue a la vez escritor, pedagogo, filósofo, músico, botánico y naturalista, y aunque definido como un ilustrado, presentó profundas contradicciones que lo separaron de los principales representantes de la Ilustración, ganándose por ejemplo la feroz inquina de Voltaire y siendo considerado uno de los primeros escritores del prerromanticismo

xxxi

Ernő Rubik (en húngaro: Rubik Ern**ő**; Budapest, 13 de julio de 1944) es un escultor, arquitecto y diseñador de la Escuela de Artes Comerciales de Budapest, autor del cubo de Rubik, pero no es el único rompecabezas mecánico que lleva su nombre, cabe destacar también el Rubik's clock (del cual no fue inventor, sólo se convirtió en el propietario de la patente al comprarla) y Rubik's Magic. Su padre era ingeniero especializado en diseños aeronáuticos y su madre, licenciada en literatura

xxxii



David Breyer Singmaster (1939, Estados Unidos) es un profesor de matemáticas jubilado de la London South Bank University, del Reino Unido. Se describe a sí mismo como metagrobólogo, alguien que se dedica al estudio del rompecabezas mecánico. Es famoso por la creación de la notación para el Cubo de Rubik, donde las caras vienen referidas por letras mayúsculas. El profesor tiene una inmensa colección de puzles mecánicos y libros de acertijos. También se ha interesado por la historia de los ordenadores y la Combinatoria.

xxxiii 

François Édouard Anatole Lucas (Amiens, 4 de abril de 1842 - París, 3 de octubre de 1891) matemático francés. Educado en la Escuela Normal Superior de Amiens. Posteriormente trabajó con Le Verrier en el observatorio de París. Sirvió como oficial de artillería en el ejército francés durante la guerra de 1870 contra Prusia. Tras la derrota francesa, Lucas volvió a París, donde se dedicó a la enseñanza de las matemáticas en dos institutos parisinos: el Liceo de San Luis y el Liceo Carlomagno.

Se le conoce sobre todo por sus trabajos sobre la sucesión de Fibonacci y por el test de primalidad que lleva su nombre, pero también fue el inventor de algunos juegos recreativos matemáticos muy conocidos como el de las ***Torres de Hanói***.

Murió de una forma un tanto peculiar, víctima de una probable septicemia a consecuencia de un corte en una mejilla sufrido en un banquete, lo que le produjo una inflamación que se complicó con fatales consecuencias.

xxxiv 

Napoleón I Bonaparte (Ajaccio, 15 de agosto de 1769-Santa Elena, 5 de mayo de 1821) militar y gobernante francés, general republicano durante la Revolución y el Directorio, artífice del golpe de Estado del 18 de brumario que lo convirtió en primer cónsul (Premier Cónsul) de la República el 11 de noviembre de 1799; cónsul vitalicio desde el 2 de agosto de 1802 hasta su proclamación como emperador de los franceses (Empereur des Français) el 18 de mayo de 1804, y fue coronado el 2 de diciembre; proclamado rey de Italia el 18 de marzo de 1805 y coronado el 26 de mayo. Ostentó ambos títulos hasta el 11 de abril de 1814 y, nuevamente, desde el 20 de marzo hasta el 22 de junio de 1815.

xxxv **El codo:** unidad de longitud empleada en muchas culturas por su origen antropométrico. En casi todas ellas era la distancia que mediaba entre el codo y el final de la mano abierta (codo real) o a puño cerrado (codo vulgar). Su valor variaba de un país a otro, inclusive dentro de un país tenía variación en dependencia del uso. Los más significativos fueron:

País y época	Medida aproximada en metros
Egipto	0,45 m.
Mesopotamia	0,533 m.
Imperio Persa	0,500 m.
Grecia	0,463 m.
Imperio romano	0,4444 m.
Árabe	0,64 m.
Tunes	0,473 m.
Marrueco	0,517 m.
India	0,447 m.
Ceilán	0,470 m.

xxxvi 

El Papiro de Ahmes, también conocido como **Papiro Matemático Rhind**, es un documento de carácter didáctico que contiene diversos problemas matemáticos; mide unos seis metros de longitud por 32 cm de anchura. Se encuentra en buen estado de conservación. El texto, escrito durante el reinado de Apofis I (1574 a 1534 a. C) por el escriba Ahmes, es copia de un documento del siglo XIX a. C. Fue El papiro fue encontrado en el siglo XIX, entre las ruinas de una edificación próxima al Ramesseum, y adquirido por Alexander Henry Rhind (Wick, Escocia, 26 de julio de 1833- Cadenabbia, Italia, 3 de julio de 1863) en 1858. Este hombre fue un abogado, historiador, geólogo y arqueólogo, considerado como el primer egiptólogo que desarrolló un método científico para realizar sus investigaciones, mediante la representación gráficamente los objetos descubiertos y el lugar en que se hallaban. A su muerte el papiro fue donado junto con el rollo de cuero matemático egipcio al Museo Británico de Londres.

xxxvii **Otto E. Neugebauer** (* 26 de mayo de 1899 en Innsbruck; † 19 de febrero de 1990) fue un matemático y astrónomo austriaco-estadounidense dedicado exclusivamente a la investigación de la historia de la ciencia, y en especial de la Astronomía. Fue un investigador tenaz, y el gran descubridor de la matemática babilónica. Ganó el Premio Balzan en 1986 para la historia de la ciencia.

xxxviii 

Johann Heinrich Lambert, o Jean-Henri Lambert (26 de agosto de 1728 - 25 de septiembre de 1777), matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán de origen francés. Nació en Mülhausen (ahora Mulhouse, Alsacia, Francia) y murió en Berlín. Demostró que el número π es irracional, usando el desarrollo en fracción continua de tan(x), con lo que cerró la posibilidad de poder determinar una expresión "exacta" (fracción numérica o cociente de dos enteros) para este número. También hizo aportes al desarrollo de la geometría hiperbólica y de la astronomía, desarrollando un método para calcular las órbitas de los cometas.

xxxix 

Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (Montbard, Borgoña, 7 de septiembre de 1707 – París, 16 de abril de 1788) naturalista, botánico, matemático, biólogo, cosmólogo y escritor francés. Buffon pretendió compendiar todo el saber humano sobre el mundo natural en su obra en 44 volúmenes *Histoire naturelle.* Su enfoque influyó en la Enciclopedia de Diderot y sus ideas también lo hicieron sobre las siguientes generaciones de naturalistas y en particular sobre Lamarck, Cuvier y Darwin.

xl

François Viète (nombre latino, Franciscus Vieta; también conocido en algunos textos en español por su nombre españolizado, Francisco Vieta) fue un matemático francés (Fontenay-le-Comte, 1540-París, 1603). Se le considera uno de los principales precursores del álgebra. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras, siendo un destacado precursor de la utilización del álgebra en criptografía, lo que le permitió descodificar los mensajes cifrados de la Corona Española. François Viète también fue conocido en su época como súbdito del rey, reconocido por su lealtad y competencia. Fue consejero privado de los reyes de Francia, Enrique III y de Enrique IV.

xli

John Wallis (Ashford, 23 de noviembre de 1616 – Oxford, 28 de octubre de 1703) fue un matemático inglés a quien se atribuye en parte el desarrollo del cálculo moderno. Fue un precursor del cálculo infinitesimal (introdujo la utilización del símbolo para representar la noción de infinito). Entre 1643 y 1689 fue criptógrafo del Parlamento y posteriormente de la Corte real. Fue también uno de los fundadores de la Royal Society y profesor en la Universidad de Oxford.

xlii

Galileo ante el Santo Oficio (Óleo de Robert-Fleury)

Galileo Galilei (Pisa, Toscana; 15 de febrero de 1564, Toscana; 8 de enero de 1642): Astrónomo, filósofo, ingeniero, matemático y físico italiano, relacionado estrechamente con la revolución científica. Eminente hombre del Renacimiento, mostró interés por casi todas las ciencias y artes (música, literatura, pintura). Sus logros incluyen la mejora del telescopio, gran variedad de observaciones astronómicas, la primera ley del movimiento y un apoyo determinante a la «Revolución de Copérnico». Ha sido considerado como el «padre de la astronomía moderna», el «padre de la física moderna» y el «padre de la ciencia».

xliii

Tungurahua (Quichua *Tungur* (Gargan-ta), *Rauray* (Ardor): Ardor en la garganta) es un estratovolcán activo situado en la zona andina de Ecuador. Se alza en la Cordillera Oriental de Ecuador límite de las provincias de Chimborazo y Tungurahua. La última erupción del volcán comenzó en 1999 y se mantiene en erupción hasta hoy en día, teniendo episodios violentos el 14 de julio de 2006, 16 de agosto de 2006, 28 de mayo de 2008, 26 de abril de 2010, 20 de agosto de 2012 y la más reciente el 1 de febrero de 2014.

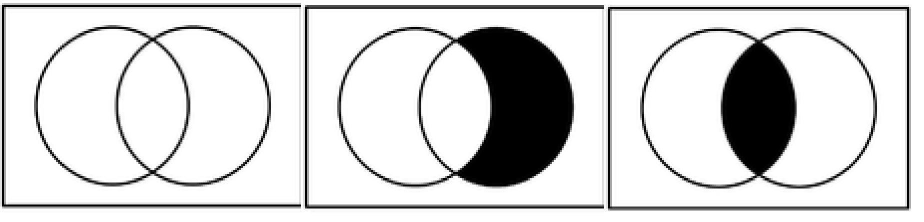
División administrativa de Tungurahua

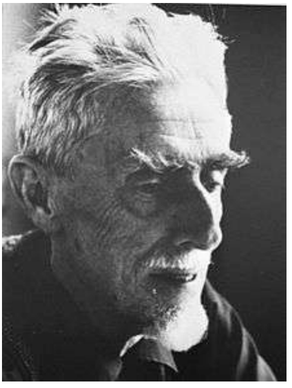
La Provincia de Tungurahua es una de las 24 provincias que conforman la República del Ecuador, situada en el centro del país, en la zona geográfica conocida como región interandina o sierra, principal-mente sobre la hoya de Patate. Su capital administrativa es la ciudad de Ambato, la cual además es su urbe más grande y poblada. Ocupa un territorio de unos 3.334 km^2, siendo la segunda provincia del país más pequeña por extensión, de-trás de Bolívar. Limita al norte con Cotopaxi, al sur con Chimborazo, por el occi-dente con Bolívar, al sureste con Morona Santiago, al este con Pastaza y al noreste con Napo

xliv

John Venn
Drypool, 4 de agosto de 1834
Cambridge, 4 de abril de 1923

Los diagramas de Venn son esquemas usados en la teoría de conjuntos, tema de interés en matemáticas, lógica de clases y razonamiento diagramático. Estos diagramas muestran colecciones (conjuntos) de cosas (elementos) por medio de líneas cerradas. La línea cerrada exterior abarca a todos los elementos bajo consideración, el conjunto universal U.



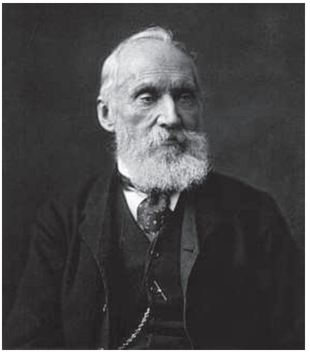
Los diagramas de Venn fueron ideados hacia 1880 por John Venn matemático y lógico británico miembro de la Real Sociedad de Londres. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad y cantidad) y silogismos conocido como los diagramas de Venn. Estos permiten una comprobación de la validez o invalidez de un silogismo. Posteriormente fueron utilizados para mostrar visualmente las operaciones más elementales de la teoría de conjuntos. murió a los 88 años xlv  **Maurits Cornelis Escher** (Leeuwarden, Países Bajos, 17 de junio de 1898-Hilversum, Países Bajos, 27 de marzo de 1972), fue un artista neerlandés conocido por sus grabados xilográficos, sus grabados al mezzotinto y sus dibujos, que consisten en figuras imposibles, teselados y mundos imaginarios. Su obra experimenta con diversos métodos de representar (en dibujos de 2 o 3 dimensiones) espacios paradójicos que desafían a los modos habituales de representación.

xlvi  **Adrián Arnoldo Paenza** (Buenos Aires, 9 de mayo de 1949) es un periodista, matemático y profesor de matemáticas argentino por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA), conocido por su trabajo en la divulgación de la matemática, lo que le valió el Premio Leelavati 2014.

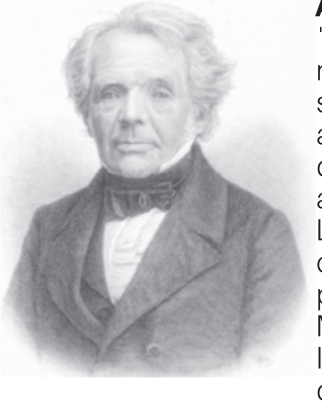
xlvii **El pitagorismo** fue un movimiento filosófico / religioso de mediados del siglo VI a. C. fundado por Pitágoras de Samos, siendo ésta la razón por la cual sus seguidores recibían el nombre **pitagórico**. Estos formaban la **Escuela pitagórica**, secta conformada por astrólogos, músicos, matemáticos y filósofos, y cuya creencia más destacada era que todas las cosas son, en esencia, números. Este movimiento descubrió los números irracionales, aunque exigía a sus seguidores que lo mantuvieran en secreto. Se cree que el pitagórico Hipaso de Metaponto reveló el secreto y, según la leyenda, fue ahogado por violar los preceptos de la secta.

xlviii 

Johann Benedict Listing (n. Fráncfort, 25 de julio de 1808 - f. Gotinga, 24 de diciembre de 1882) matemático alemán. A partir de 1830 estudió en la Universidad de Gotinga, donde fue alumno de Gauss. En 1834 expone su tesis titulada De superficiebus secundi ordinis. Fue el primero en utilizar la palabra topología en vez del término usual en la época de geometría situs, queriendo destacar de esa manera la autonomía creciente de esta disciplina.

xlix 

William Thomson, Lord Kelvin, (Belfast, Irlanda, 26 de junio de 1824 - Largs, Ayrshire, Escocia, 17 de diciembre de 1907) físico y matemático británico, se destacó por sus importantes trabajos en el campo de la termodinámica y la electricidad, gracias a sus profundos conocimientos de análisis matemático. Es uno de los científicos que más contribuyó a modernizar la física, especialmente conocido por haber desarrollado la escala de temperatura Kelvin. Recibió el título de barón Kelvin en honor a los logros alcanzados a lo largo de su carrera.

l 

August Ferdinand Möbius (/ˈʔaʊɡʊst ˈfɛɐdiːnant ˈmøːbjʊs/ Schulpforta, 17 de noviembre de 1790 — Leipzig, 26 de septiembre de 1868) fue un matemático alemán y astrónomo teórico. Conocido por su descubrimiento de la banda de Möbius, junto al matemático alemán Johann Benedict Listing; fue el primero en introducir las coordenadas homogéneas en geometría proyectiva, así como la transformación de Möbius, importante en geometría proyectiva y la transformada de Möbius, usada en teoría de números; también se interesó teoría de números, y la importante función aritmética de Möbius μ(n) y la fórmula de inversión de Möbius se nombran así por él.

li 

Giuseppe Peano (Espineta, 27 de agosto de 1858 - Turín, 20 de abril de 1932) matemático, lógico y filósofo italiano, conocido por sus contribuciones a la lógica matemática y la teoría de números, publicó más de doscientos libros y artículos, la mayoría en matemáticas. La mayor parte de su vida la dedicó a enseñar en Turín. Se destacan los **axiomas de Peano o postulados de Peano** son un sistema de axiomas aritméticos ideados para definir los números naturales, que se han utilizado prácticamente sin cambios en diversas investigaciones matemáticas, incluyendo cuestiones acerca de la consistencia y completitud de la aritmética y la teoría de números.

lii 

Marie Ennemond Camille Jordan (Lyon, 5 de enero de 1838-París, 22 de enero de 1922) matemático francés, conocido tanto por su trabajo sobre la teoría de grupos, como por su influyente Curso de análisis (*Cours d'analyse*). Entre sus trabajos más significativos se encuentran:

- El teorema de la curva de Jordan: un resultado topológico recogido en análisis complejo.
- La forma canónica de Jordan en álgebra lineal.
- El teorema de Jordan-Holder, que es el resultado básico de unas series de composiciones.

liii 

Pável Samuílovich Urysón (en ruso, Павел Самуилович Урысон; Odesa, Imperio ruso, 3 de febrero de 1898 - Batz-sur-Mer, costa de Bretaña, Francia, 17 de agosto de 1924) matemático ruso. Urysón cursó sus estudios secundarios en una escuela privada de Moscú. Comenzó a estudiar física en 1915 en la Universidad de Moscú, pero pronto su interés se volcó en las matemáticas. Se graduó en 1919 y en junio de 1921 se doctoró con una tesis sobre ecuaciones integrales. Como profesor de la misma universidad, Urysón se orientó luego hacia la Topología y, en particular, a elucidar el concepto de dimensión. Murió ahogado cuando nadaba en las costas de Bretaña.

liv 

Karl Menger (Viena, Austria, 13 de enero de 1902 - Highland Park, Illinois, EE.UU., 5 de octubre de 1985) matemático austriaco, hijo del famoso economista Carl Menger, conocido por el teorema de Menger. Dentro de las matemáticas trabajó en álgebra, álgebra de la geometría, teoría de la curva y la dimensión, etc. Además, contribuyó a la teoría de juegos y a las ciencias sociales. Su contribución más popular fue la famosa esponja de Menger (erróneamente conocida como la esponja de Sierpinski), una versión tridimensional de la alfombra de Sierpinski. También está relacionada con el conjunto de Cantor; junto a Arthur Cayley, Menger se considera uno de los fundadores de la geometría de la distancia, sobre todo por haber formalizado definiciones de las nociones de ángulo y de la curvatura en términos de cantidades físicas directamente medibles, concretamente proporciones de los valores de distancia.

lv 

Felix Christian Klein (Düsseldorf, 25 de abril de 1849 - Gotinga 22 de junio de 1925) matemático alemán que demostró que las geometrías métricas, euclidianas o no euclidianas, constituyen casos particulares de la geometría proyectiva. En 1872, presentó una notable clasificación de la geometría, el "programa de Erlangen", que puso fin a la escisión entre geometría pura y geometría analítica. En esta clasificación el concepto de grupo desempeña un papel fundamental, ya que el objeto de cada geometría se convierte en el estudio del grupo de transformaciones que la caracteriza. Como profesor de la Universidad de Gotinga (1886), fue el fundador de la "Gran Enciclopedia de las matemáticas" (1895) y uno de los abogados y artífices de la renovación de la enseñanza de las matemáticas en los estudios secundarios. Klein fue además un importante organizador de grupos científicos y de actividades docentes en equipo. Se le considera como uno de los principales contribuyentes a que Gotinga se transformara en un importante centro para el desarrollo de la matemática en Europa.

lvi 

Vladimir Nabokov (1899-1977), novelista estadounidense de origen ruso, poeta y crítico, considerado como una de las principales figuras de la literatura universal. Nació el 23 de abril de 1899, en San Petersburgo, en el seno de una familia de la aristocracia. Tras la Revolución de Octubre su familia abandonó. En 1922 Nabokov se graduó en la Universidad de Cambridge con la máxima calificación. Bajo el seudónimo de Vladimir Sirin comenzó a escribir para los diarios de los emigrantes rusos en Berlín, donde vivió de 1923 a 1937. Su novela sobre ajedrez, La defensa de ***Lŭzin*** (1930), lo consagró como uno de los principales valores de la joven generación de escritores emigrados de Rusia. Durante la década de 1960 se tradujeron a diversas lenguas algunas de las primeras novelas En 1959 Nabokov se estableció en Suiza, donde vivió recluido hasta su muerte el 2 de julio de 1977.

lvii **GeoGebra:** software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo, lo continuó en la Universidad de Atlantic, Florida, luego en la Universidad Estatal de Florida y en la actualidad, en la Universidad de Linz, Austria.

GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas. Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas.

lviii 

Alberto Durero: (21 de mayo de 1471-Núremberg, 6 de abril de 1528), artista alemán, una de las figuras más importantes del renacimiento, conocido en todo el mundo por sus pinturas, dibujos, grabados y escritos teóricos sobre arte, que ejercieron una profunda influencia en los artistas del siglo XVI de su propio país y de los Países Bajos.

lix **Fidias** (c.490-c.430 a.C.), escultor griego del periodo clásico, destaca por su exquisita perfección en el tratamiento de la forma, el volumen y la expresión de sus esculturas. Alcanzó también fama como arquitecto y pintor. Dado que la mayor parte de sus trabajos originales han desaparecido, el conocimiento de su obra es posible gracias a las descripciones que de la misma hicieron los escritores antiguos. Su primer encargo conocido fue un monumental grupo escultórico en bronce representando a los héroes nacionales con el general Milcíades el Joven como figura principal. El estadista ateniense Pericles le encomendó tanto la supervisión de todas las obras públicas como la realización de cuantas estatuas debían erigirse en la ciudad. Fidias dirigió las obras de construcción de los Propileos, que eran la entrada monumental a la Acrópolis, y del Partenón. Para el interior de este último edificio realizó, en oro y marfil (criselefantina) la monumental estatua de Atenea, diosa de la sabiduría y protectora de Atenas. Una de las siete maravillas del mundo, la colosal estatua de Zeus, padre de los dioses, ubicada en Olimpia, es considerada su obra maestra.

Los últimos años de la vida de Fidias están plagados de conflictos. Los enemigos de Pericles le acusaron de apropiarse del oro que había recibido para levantar la estatua de Atenea. Al parecer murió en prisión o según otra versión, en el destierro. Una tercera fuente de información afirma que le fue levantado el cargo de malversación, pero se le condenó sin piedad por haber esculpido su retrato y el de Pericles en el escudo dorado que portaba la estatua de Atenea.

Tanto los críticos antiguos como los modernos coinciden en afirmar que las obras de Fidias, junto con las tragedias del dramaturgo griego Sófocles, constituyen la expresión más perfecta del espíritu del más noble periodo de la civilización griega, en el que las formas artísticas se utilizaron para reproducir la belleza ideal más que la realidad natural, primando la plasmación de las características esenciales e intemporales por encima de las individuales y transitorias.

lx

Leonardo da Vinci (Leonardo di ser Piero da Vinci) (Vinci, 15 de abril de 1452-Amboise, 2 de mayo de 1519) fue un polímata florentino del Renacimiento italiano. Fue a la vez pintor, anatomista, arquitecto, paleontólogo, artista, botánico, científico, escritor, escultor, filósofo, ingeniero, inventor, músico, poeta y urbanista. Murió acompañado de Francesco Melzi, a quien legó sus proyectos, diseños y pinturas. Tras pasar su infancia en su ciudad natal, Leonardo estudió con el célebre pintor florentino Andrea de Verrocchio. Sus primeros trabajos de importancia fueron creados en Milán al servicio del duque Ludovico Sforza. Trabajó a continuación en Roma, Bolonia y Venecia, y pasó los últimos años de su vida en Francia, por invitación del rey Francisco I.

lxi 

Diego Rodríguez de Silva y Velázquez (Sevilla, bautizado el 6 de junio de 1599-Madrid, 6 de agosto de 1660), conocido como **Diego Velázquez**, pintor barroco español considerado uno de los máximos exponentes de la pintura española y maestro de la pintura universal. Pasó sus primeros años en Sevilla, donde desarrolló un estilo naturalista de iluminación tenebrista, por influencia de Caravaggio y sus seguidores. A los 24 años se trasladó a Madrid, donde fue nombrado pintor del rey Felipe IV y cuatro años después fue ascendido a pintor de cámara, el cargo más importante entre los pintores de la corte. A esta labor dedicó el resto de su vida. Su trabajo consistía en pintar retratos del rey y de su familia, así como otros cuadros destinados a decorar las mansiones reales; a partir de 1631 pintó sus grandes obras: *La rendición de Breda, Retrato del papa Inocencio X, Las meninas y Las hilanderas.*

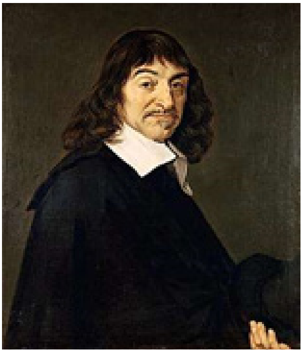
lxii 

Margarita María Teresa de Austria (Madrid, 12 de julio de 1651-Viena, 12 de marzo de 1673) fue infanta de España, de ascendencia **española** y alemana y emperatriz consorte del Sacro Imperio Romano Germánico por su matrimonio con su tío, el emperador Leopoldo I.

lxiii **Teodoro de Cirene** (465a.C. - 398a.C.) fue un filósofo y matemático griego nacido en Cirene (hoy en día Shahhat, en Libia). Fue desarrollador de la teoría de los números irracionales; fue Alumno de Protágoras, y vivió la mayor parte de su vida en Atenas, donde conoció a Sócrates y a Platón. Este último escribiría el diálogo Teeteto. El personaje que da título al diálogo, Teeteto, había sido discípulo de Teodoro.

Teodoro trabajó en campos tan diversos como la filosofía, la astronomía, la aritmética, la música y la educación como pitagórico, creía que la alegría y el juicio eran la base para llegar a la felicidad. Es conocido sobre todo por su trabajo matemático, donde probó la irracionalidad de las raíces de los números enteros no cuadrados (2, 3, 5...) al menos hasta 17 a base del método tradicional pitagórico de usar la reducción al absurdo y llegar a una inconsistencia relacionada con pares e impares.

lxiv



René Descartes, también llamado Renatus Cartesius (en escritura latina) (La Haye en Touraine, Turena, 31 de marzo de 1596-Estocolmo, Suecia, 11 de febrero de 1650), filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna, así como uno de los epígonos con luz propia en el umbral de la revolución científica. En física Descartes está considerado como el creador del mecanicismo, y en matemática, de la geometría analítica. Se le asocia con los ejes cartesianos en geo-metría, con la iatromecánica y la fisiología mecanicista en medicina, con el princi-pio de inercia en física, con el dualismo filosófico mente/cuerpo y el dualismo me-tafísico materia/espíritu. Su método filosófico y científico, que expone en Reglas para la dirección de la mente (1628) y más explícitamente en su Discurso del mé-todo (1637), establece una clara ruptura con la escolástica que se enseñaba en las universidades. Está caracterizado por su simplicidad —en su Discurso del mé-todo únicamente propone cuatro normas— y pretende romper con los intermina-bles razonamientos escolásticos. Toma como modelo el método matemático, en un intento de acabar con el silogismo aristotélico empleado durante toda la Edad Media, esto lo enfrenta a las iglesias tanto católica como protestantes, estas con-tradicciones lo llevan a prácticamente exiliarse en los Países Bajos.

En septiembre de 1649, la reina Cristina de Suecia llamó a Descartes a Estocol-mo. Allí murió de una neumonía el 11 de febrero de 1650, a los 53 años de edad. Actualmente se pone en duda si la causa de su muerte fue la neumonía porque en 1980, el historiador y médico alemán Eike Pies halló en la Universidad de Leiden una carta secreta del médico de la corte que atendió a Descartes, el holandés Johan

Van Wullen, en la que describía al detalle su agonía. Curiosamente, los síntomas presentados —náuseas, vómitos, escalofríos— no eran propios de una neumonía. Tras consultar a varios patólogos, Pies concluyó en su libro El homicidio de Descartes, documentos, indicios, pruebas, que la muerte se debía a envenenamiento por arsénico. La carta secreta fue enviada a un antepasado del escritor, el holandés Willem Pies.

lxv

Jakob Bernoulli (Basilea, 27 de diciembre de 1654 - ibíd. 16 de agosto de 1705), también conocido como Jacob, Jacques o James Bernoulli; destacado matemático y científico suizo; hermano mayor de Johann Bernoulli (miembro de la familia Bernoulli). En la Universidad de Basilea estudió filosofía y teología, porque su padre quería que se convirtiera en teólogo, pero Jakob continuó, a escondidas, las que eran sus auténticas aficiones: la física y las matemáticas. A partir de los planteamientos de Leibniz desarrolló problemas de cálculo infinitesimal; fundó en Basilea un colegio experimental, estudió en forma autodidacta la forma del cálculo ideada por Leibniz. Desde 1687 hasta su muerte fue profesor de Matemáticas en Basilea. Jacob I fue uno de los primeros en desarrollar el cálculo más allá del estado en que lo dejaron Newton y Leibniz y en aplicarlo a nuevos problemas difíciles e importantes. Sus contribuciones a la geometría analítica, a la teoría de probabilidades y al cálculo de variaciones fueron de extraordinaria importancia. Durante un viaje a Inglaterra en 1676, Jakob Bernoulli conoció a Robert Boyle y Robert Hooke. Este contacto le inspiró una dedicación vitalicia a la ciencia y la matemática. Fue nombrado Lector en la Universidad de Basilea en 1682 y fue nombrado Profesor de Matemáticas en 1687. En 1690 se convirtió en la primera persona en desarrollar la técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables. Se familiarizó con el cálculo mediante su correspondencia con Gottfried Leibniz, y colaboró con su hermano Johann en varias aplicaciones, siendo notable la publicación de artículos en curvas trascendentales (1696) e isoperimetría (1700, 1701). Su obra maestra fue Ars Conjectandi (el Arte de la conjetura), un trabajo pionero en la teoría de la probabilidad. La publicó su sobrino Nicholas en 1713, ocho años tras su muerte por tuberculosis. Los términos ensayo de Bernoulli y números de Bernoulli son resultado de su trabajo.

lxvi 

Evangelista Torricelli (Faenza, Italia, 15 de octubre 1608-Florencia, Italia, 25 de octubre 1647) físico y matemático italiano. Inventó el baró-metro de mercurio en 1643 y por este aporte a la ciencia ha trascendido, pero también realizó otros descubrimientos entre los que se encuentran: el principio que dice que, si una serie de cuerpos están conectados de modo tal que, debido a su movimiento, su centro de gravedad no puede ascender o descender, entonces dichos cuerpos están en equilibrio; descubrió además que la envolvente de todas las trayectorias parabólicas descritas por los proyectiles lanzados desde un punto con igual velocidad, pero en direcciones diferentes, es un paraboloide de revolución. Así mismo, empleó y perfeccionó el método de los indivisibles de Cavalieri; también realizó importantes mejoras en el telescopio y el microscopio, siendo numerosas las lentes por él fabricadas y grabadas con su nombre que aún se conservan en Florencia.

Índice

"Matemática en espiral" no es propiamente un libro de matemática, es un libro acerca de la matemática, y aunque se ha tratado de que los temas tengan el rigor de esta ciencia, la idea que prevalece es hablar de la matemática como una mani-festación de la cultura, sin atiborrar la cabeza del lector de fórmulas y conceptos que probablemente le sea difícil comprender. Los autores han querido trasmitir en este libro la perfección de esta maravillosa ciencia, y que más allá de números y cálculo existe un universo de gran belleza imaginativa escondida detrás de cada figura, cada fórmula o hasta cada letra. Para esto se lleva al lector en un viaje en espiral que va desde "Más allá del Googol" hasta el capítulo final del libro "Cuando la vuelta sigue a la vuelta". En fin, se pretende mostrar cuánta razón tenía el matemático Mittag-Leffler cuando al referirse a la obra del noruego Niels Henrik Abel expresó que la frase de Weierstrass: "El verdadero matemático es poeta", puede parecer singularmente extraña al gran público. Y, sin embargo, es así. Dicha frase no implica sólo que al matemático le hace falta, como al poeta, imaginación e intuición. Esto es verdad para todas las ciencias, pero no en el mismo grado que para la Matemática. La frase tiene un significado de mayor alcance. Los mejores trabajos de Abel son verdaderos poemas líricos, de una belleza sublime, en donde la perfección de la forma deja transparentar la profundidad del pensamiento.

EDITORIAL UNIVERSO SUR

FUNDACIÓN METROPOLITANA
Fomentando la Educación Superior

ISBN: 978-959-257-575-2
9 789592 575752