COLECCIÓN

INVESTIGACIÓN, DESARROLLO E INNOVACIÓN

6

PROBABILIDADES

CON UN ENFOQUE AMBIENTALISTA

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
ARTURO BOFILL PLACERES
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

UMET UNIVERSIDAD METROPOLITANA

PROBABILIDADES

CON UN ENFOQUE AMBIENTALISTA

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
ARTURO BOFILL PLACERES
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

INVESTIGACIÓN, DESARROLLO E INNOVACIÓN

Con el auspicio de la Fundación Metropolitana

FUNDACIÓN METROPOLITANA
Fomentando la Educación Superior

PROBABILIDADES

CON UN ENFOQUE AMBIENTALISTA

RAÚL LÓPEZ FERNÁNDEZ
ARTURO BOFILL PLACERES
DIANA ELISA PALMERO URQUIZA

Diseño de carátula: D.I. Yunisley Bruno Díaz

Edición: D.I. Yunisley Bruno Díaz

Corrección: MSc. Dolores Pérez Dueñas

Dirección editorial: Dr. C. Jorge Luis León González

ISBN: 978-959-257-565-3

Editorial: “Universo Sur”.

Universidad de Cienfuegos. Carretera a Rodas, Km 3 ½.

Cuatro Caminos. Cienfuegos. Cuba.

CP: 59430

Prólogo

La probabilidad es un término que se maneja cotidianamente. Así se oye decir cuál es la probabilidad de lluvia en el día de mañana, cual es la probabilidad de supervivencia ante determinado cuadro clínico, cual es la probabilidad de que aumente el precio del petróleo en un período dado, etc.

Si en sus inicios surgió como un método para poder analizar los juegos de azar, hoy esta rama de la ciencia matemática se emplea en todas las ciencias donde los fenómenos o sucesos aleatorios están presentes, ya sea en el campo de la pedagogía, de las ciencias médicas, de las ciencias naturales o de las ciencias empresariales, por solo mencionar algunos ejemplos. De aquí que su enseñanza está presente en casi todas las carreras universitarias y en los programas de postgrado que desarrollan los Centros de educación superior.

Dos problemas de la sociedad contemporánea, íntimamente relacionados, el desarrollo local y la protección del medio ambiente, con el fin de lograr el tan mencionado desarrollo sostenible y que es tema de estudio e investigación en muchas universidades, hacen un amplio uso de las herramientas de las probabilidades, ya que los sucesos aleatorios y por ende la incertidumbre y el riesgo están presente en cualquier análisis que se quiera realizar. Aún, ante la falta de información histórica ante elementos nuevos con un comportamiento aleatorio, el uso de la probabilidad subjetiva basada en individuos o grupos de expertos ha ido ampliando su utilización.

El libro que se presenta se ha organizado en cuatro capítulos: el primero se dedica a los conceptos básicos de la teoría de probabilidades, iniciando con la definición de fenómeno o experimento aleatorio, suceso o evento y las operaciones con eventos. El segundo capítulo se dedica a definir distintos enfoques para el cálculo de la probabilidad, sus propiedades y diferentes reglas asociadas al cálculo de probabilidades. El tercero introduce el concepto de variable aleatoria y de las medidas de su tendencia central y dispersión. El cuarto se dedica al estudio de las distribuciones de probabilidades teóricas más utilizadas en la vida práctica como son la Distribución Binomial, la de Poisson y la Distribución Normal.

El texto tiene un enfoque esencialmente práctico, sin perder su rigor matemático necesario, por lo que cada concepto o temática se acompaña de ejemplos y un buen número de problemas resueltos, que facilitan la comprensión por parte de los que lo utilicen y finalmente se plantean problemas propuestos para la solución independiente de los lectores. Los problemas utilizados están enfocados en problemas reales y se ha enfatizado en la aplicación de las probabilidades a los problemas de desarrollo sustentable, con buen número de ejemplos dedicados a los problemas medio ambientales y de desarrollo local, aunque también se agregan otros tipos de problemas que permiten comprender el amplio campo de aplicación de esta rama de la matemática.

Otra característica del libro es la utilización del Excel para el cálculo de probabilidades en el Capítulo 4, dedicado a las distribuciones de probabilidad teóricas más utilizadas, sin eliminar el uso tradicional de las Tablas Estadísticas para el cálculo de dichas probabilidades.

Este libro puede utilizarse en cursos de esta materia en diferentes carreras universitarias o en cursos de postgrado.

Agradecemos a los profesores y alumnos que han utilizado partes de este libro que hoy se presentan y que con sus opiniones y sugerencias han ayudado a su perfeccionamiento.

Capitulo I. Espacio muestral y eventos

1.1. Fenómeno o experimento aleatorio

La palabra probabilidad, es de uso cotidiano en la vida actual. Así cuando dan el parte meteorológico en cualquier lugar, se usa a menudo este término, asociado a la probabilidad de que llueva en determinadas zonas. De forma similar en la industria se usa el término en Control de la calidad donde se menciona la probabilidad de producir piezas defectuosas o en gestión de proyectos para calcular la probabilidad de que un nuevo proyecto se concluya en tiempo y así sucesivamente. Intuitivamente se conoce que a mayor probabilidad más posibilidad hay de ocurrencia del hecho a que está asociada. Se debe destacar que existe una diferencia notable entre posibilidad y probabilidad, la primera, es subjetiva y la segunda, es un número objetivo. Así en la toma de decisiones la alternativa de mayor probabilidad es la que generalmente se selecciona.

La probabilidad y la estadística están asociadas al estudio y análisis de los llamados Fenómenos o Experimentos Aleatorios. Un Fenómeno o Experimento aleatorio, es aquel que bajo condiciones similares no siempre se obtiene el mismo resultado, pero se conocen todos los posibles resultados que se pueden obtener. Un ejemplo, de fácil comprensión, es el lanzamiento de un dado de seis caras perfectamente balanceado. Si se realiza un lanzamiento, no se puede predecir su resultado, es decir, qué valor saldrá en la cara superior, lo que sí está claro es que será un número entre uno y seis. Esto constituye un Experimento Aleatorio. Tampoco puede afirmarse que tiempo exacto demorará un cliente en la atención de la caja en un banco, pero se puede saber que será un valor mayor que cero y menor que infinito. Otros ejemplos de Fenómenos o Experimentos Aleatorios son:

- La cantidad de piezas defectuosas en una línea de producción.
- La duración en la ejecución de un proyecto de desarrollo local.
- El gasto de combustible por kilowatt producido en una planta de energía eléctrica.
- Que un equipo de futbol gane o pierda su próximo juego.
- El tiempo que demora el viaje en un auto entre dos ciudades.
- El gasto de agua en un hotel durante un día.

- La cantidad de CO_2 que emiten los ómnibus en una ciudad en un día.
- Dar o no en el blanco en una competencia de tiro.
- La cantidad de camarón que se produce en una cosecha.
- La cantidad de basura que se genera en un distrito metropolitano en un día.
- La cantidad de personas que se presentarán a una convocatoria para ocupar una plaza.

En todos los ejemplos anteriores, no se puede saber con exactitud, que resultado se obtendrá, pero si se puede saber cuáles son todos los resultados que se obtendrán.

1.2. Espacio muestral de un fenómeno o experimento aleatorio

A cada uno de los posibles resultados de un experimento o fenómeno aleatorio se le denomina Punto muestral. El conjunto de todos los puntos muestrales es el Espacio muestral (Hernández, Castillo, Bofill & Pons, 2007). El Espacio muestral para un experimento aleatorio se denota por la letra S. En el caso del lanzamiento de un dado, el número que sale en la cara superior, tendrá 6 posibles resultados (1,2,3,4,5 y 6) y esos seis puntos constituyen el Espacio muestral de ese experimento aleatorio.

El Espacio Muestral se clasifica en discreto o continuo. El primero es cuando solo toma valores en determinados puntos del campo de los números enteros o los resultados se pueden representar por letras o símbolos. Ejemplos de este tipo de Espacio Muestral es el lanzamiento de un dado, explicado anteriormente, donde solo hay 6 resultados posibles. Otro ejemplo podría ser la calidad de un producto al final de un proceso de producción, donde puede ser clasificado como Bueno (B) o Defectuoso (D).

Los Espacios muestrales discretos pueden ser finitos o infinitos numerables. Siempre que se pueda establecer una biyección entre los elementos del Espacio muestral y el conjunto de los números naturales, se considera infinito numerable. Como ejemplos pueden mencionarse, para Espacios muestrales finitos: el lanzamiento de un dado; para Espacios muestrales infinito numerable la cantidad de piezas que se inspeccionan al final de un proceso de producción hasta que aparezca la primera pieza defectuosa.

Los Espacios muestrales continuos o infinitos no numerables, pueden tomar cualquier valor en el campo de los números reales. Este tipo de Espacio muestral está asociado a distintos tipos de experimentos cuyos resultados puedan ser medibles. Ejemplos, la cantidad de toneladas de banano disponibles para una cosecha en una semana, el tiempo que demora un viaje entre dos ciudades, etc. En la Tabla 1 se muestra ejemplos de tipos de Espacios muestrales.

Tabla 1. Ejemplos de Espacios Muestrales.

FENOMENO O EXPERIMENTO ALEATORIO	**ESPACIO MUESTRAL**	**TIPO DE ESPACIO MUESTRAL**	**REPRESENTACIÓN**
Resultados del próximo juego de un equipo de futbol.	Gana, pierde o empata.	Discreto y finito	S= {G; P; E}; donde G significa ganar, P perder y E empatar.
Cantidad de proyectos de desarrollo local que culminan en el tiempo programado	Una cantidad entre 0 y n proyectos.	Discreto y finito	S= {1; 2: 3:…; n}, donde 1 significa que existe un proyecto que culmina en tiempo, el 2 que existen dos proyectos que terminan en tiempo, …., n que existen n proyectos que terminan en tiempo.
Cantidad de autos a los que se inspecciona sus gases de escape hasta que aparece el primero que viola los niveles permitidos	Una cantidad entre cero e infinito	Discreto e infinito numerable	S= {1; 2: 3:…; n; …}, donde cada valor se asocia a la cantidad de autos inpeccionados.; …
El consumo de agua en un hotel	Un valor entre x_1 mínimo y x_2 máximo.	Continuo o infinito no numerable	$S = \{x_i \in \mathbb{R}$ +/ x_1 min $\leq x_i \leq x_2$ max}; donde x_1 y x_2 pertenecen a $\mathbb{R}$
La cantidad de toneladas de basura a recolectar en un distrito metropolitano en un día.	Un valor entre x_1 mínimo y x_2 máximo.	Continuo o infinito no numerable	$S = \{x_i \in \mathbb{R}$ + / x_1 min $\leq x_i \leq x_2$ min}; donde x_1 y x_2 pertenecen a $\mathbb{R}$
Cantidad de lluvia que cae en un mes en un determinado territorio.	Un valor entre x_1 mínimo y x_2 máximo.	Continuo o infinito no numerable	$S = \{x_i \in \mathbb{R}$ + / x_1 min $\leq x_i \leq x_2$ max}; donde x_1 y x_2 pertenecen a $\mathbb{R}$

Para representar los Espacios Muestrales se utiliza la notación de la Teoría de Conjuntos y en este texto se utilizará la forma tabular, como se muestra en la tabla anterior.

1.3. Eventos o sucesos de un fenómeno o experimento aleatorio

En un Fenómeno o Experimento aleatorio se pueden definir eventos o sucesos. Un evento o suceso es un resultado de un experimento aleatorio y un subconjunto del Espacio muestral (Hernández, et al., 2007). Los eventos se definen por una letra mayúscula y se representan de igual forma que se representa S, en ocasiones se hacen acompañar de subíndice.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado de seis caras perfectamente balanceado, se puede estar interesado en estudiar que salga un número par en la cara superior, entonces se define el evento:

A: que salga un número par

Entonces:

A = {2, 4, 6}

B: Que salga un número menor o igual que 3

B = {1, 2, 3}

Para el caso de eventos definidos en un Espacio Muestral continuo, la notación de un evento puede representarse similar a la notación utilizada para S. Así, para el ejemplo del consumo de agua en un hotel en un día, se puede definir el evento:

C: que el consumo de agua de un hotel en un día, sea de 20 mil litros o menos.

Entonces se denotará el evento como sigue:

$C = \{x_i \in \Re + / x_i \leq 20\ 000\ L\}$

De forma similar se puede definir un evento D: que el consumo de agua en un día en un hotel esté entre 15 mil y 20 mil el cual se representa por:

$D = \{x_i \in \mathbb{R} + / 15\ 000\ L \leq xi \leq 20\ 000\ L\}$

1.4. Operaciones con eventos o sucesos

Con los eventos o sucesos definidos en un Espacio muestral pueden realizarse operaciones que son útiles para el cálculo de probabilidades que se analizará posteriormente (Parzen, 1970). Existe un teorema sobre el isomorfismo entre las Álgebras de sucesos, menor estructura sobre las que se puede definir una probabilidad, y las Álgebras de Conjunto el cual garantiza que todas las operaciones entre conjuntos son aplicables a los sucesos y viceversa.

Complemento de un evento

El complemento de un evento A son aquellos puntos muestrales de S que no están en A. Se denota por A^c ó $\overline{A}$ Ó A' .Su representación gráfica mediante un diagrama de Venn, se muestra en la Figura 1:

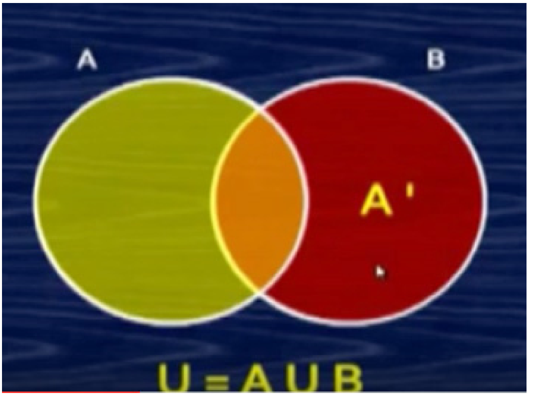


Figura 1. Complemento de un evento A.

Ejemplo: si en el lanzamiento de un dado se define el evento A: Que salga un número par, entonces:

A = {2, 4, 6}

Y su complemento es:

A^c = {1, 3, 5}, o sea el conjunto de números impares, es decir, todos aquellos elementos del Espacio muestral que no están en A.

En el caso del consumo de agua en un día en un hotel se define el evento C: que el consumo sea de 20 000 litros o menos, entonces, el complemento de C es:

$C = \{x_i \in \Re + / x_i \leq 20\,000 \text{ L}\}$

$C^c = \{x_i \in \Re + / x_i > 20\,000 \text{ L}\}$

O sea el intervalo de S para este problema que no está contenido en el evento C.

Intersección de dos eventos

La intersección de dos eventos A y B, son todos los puntos muestrales que son comunes a ambos eventos, o sea que están en ambos eventos. Se representa mediante un diagrama de Venn en la Figura 2:

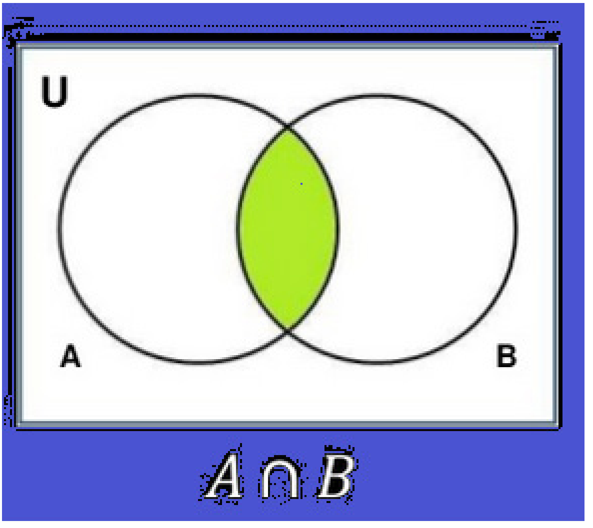


Figura 2. Intersección de dos eventos A y B.

Sea A = {1, 2, 3, 4} y B = {2, 4, 6} dos eventos definidos en el experimento del lanzamiento de un dado, entonces la intersección de A y B, que se denota por A.B o $A \cap B$ viene dada por:

A.B = {2, 4} que son los dos puntos muestrales que pertenecen a ambos eventos.

En el ejemplo del consumo de agua en un hotel, si de definen los eventos:

A: Que el consumo sea menor de 20 000 L.

B: Que el consumo esté entre 15 000 y 20 000 L

Entonces,

$A = \{x_i \in \Re + / x_i \leq 20\,000 \text{ L}\}$

$B = \{x_i \in \Re + / 15\,000 \leq x_i \leq 20\,000\}$

Por tanto $A.B = \{x_i \in \Re + / 15\,000 \text{ L} \leq x_i \leq 20\,000 \text{ L}\}$

Suma o adición de dos eventos

La suma o adición de dos eventos A y B definidos en el mismo Espacio Muestral S, está compuesto por todos los puntos muestrales que pertenecen a A o a B y se denota por A + B o $A \cup B$. En la Figura 3 se representa por un diagrama de Venn:

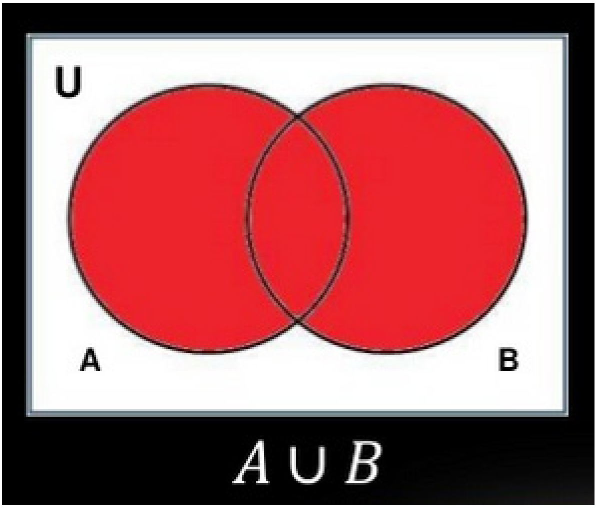


Figura 3. Unión de dos eventos A y B.

Tomando los mismos eventos definidos anteriormente para el lanzamiento de un dado. Sean A = {1, 2, 3, 4} y B = {2, 4, 6}, entonces:

A + B = {1, 2, 3, 4, 6}

En el ejemplo del viaje entre dos ciudades, si de definen los eventos:

A: Que el consumo de agua esté entre 15 000 y 20 000 L.

B: Que el consumo de agua esté entre 10 000 y 18 000 L.

Entonces,

$A = \{x_i \in \Re + / 15\ 000 \leq x_i \leq 20\ 000 \text{ L}\}$

$B = \{x_i \in \Re + / 10\ 000 \leq x_i \leq 18\ 000\}$

Por tanto $A + B = \{x_i \in \Re + / 10\ 000 \leq x_i \leq 20\ 000 \text{ L}\}$

Y contiene todos los puntos de los intervalos A o B.

Evento nulo o imposible

Un evento nulo o imposible es aquel que no puede ocurrir en un Espacio muestral dado. Además, cuando entre dos o más sucesos no existen elementos del Espacio muestral en común se dice que la intercepción es nula o vacía y se dice que los eventos son mutuamente excluyentes. Esto se representa en la Figura 4.

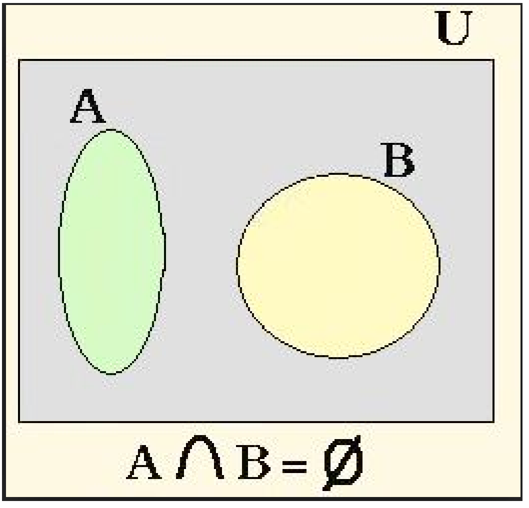


Figura 4. Evento nulo o vacío.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el evento A que salga un número 7 es imposible, pues no existe en el Espacio muestral de ese experimento. Los eventos nulos o imposibles se denotan como:

A = {Φ}

Sea A el evento obtener un número divisible por 2 y B obtener un número impar, en el lanzamiento de un dado.

A. B= {Φ}

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos son mutuamente excluyentes si entre ambos los dos no hay intersección, o sea, la ocurrencia de uno implica la no ocurrencia del otro. Entonces A y B son mutuamente excluyentes si A.B = {Φ}.

Por ejemplo, en el experimento del lanzamiento de un dado los eventos:

A: Que salga un número par. A = {2, 4, 6}

B: Que salga un número impar B = {1, 3, 5}

Son mutuamente excluyentes, ya que A.B = {Φ}, o sea no hay puntos comunes entre A y B y la ocurrencia de uno de ellos implica que el otro no ocurra.

Cuando los eventos mutuamente excluyentes cubren todo el Espacio muestral, como en el ejemplo anterior, se denominan eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

Si por otra parte en el mismo experimento se definieran A = {2, 4} y B = {1, 3}, estos eventos serían también mutuamente excluyentes, pero no exhaustivos, ya que los puntos 5 y 6 de S no están en estos eventos.

Las operaciones de intersección y suma pueden generalizare para varios eventos y tendrían la misma interpretación.

1.5. Problemas resueltos de espacios muestrales y eventos

PR 1.1. En un experimento aleatorio, que tiene como Espacio muestral S = {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, se han definido los siguientes eventos:

P = {1,2,3,4} y Q = {3, 4, 5, 6}

Represente los siguientes eventos:

a) Complemento del evento P.

b) Complemento del evento Q.

c) Intersección de los eventos P y Q.

d) Unión de los eventos P y Q.

e) Complemento del evento definido en el inciso c

f) Complemento del evento definido en el inciso d.

g) De los eventos definidos en los incisos anteriores seleccione dos que sean mutuamente excluyentes y exhaustivos y otros dos que sean mutuamente excluyentes, pero no exhaustivos.

Solución

El Espacio muestral de este problema es discreto, finito y contable numerable, pues solo toma valores enteros y son elementos.

a) Se define el evento A: complemento del evento P

$A = P^C$

Por tanto, serán todos los elementos de S que no están en P, entonces,

$A = P^C = \{0, 5, 6, 7, 8\}$ **R//**

b) Se define el evento B: complemento del evento Q.

$B = Q^C$

De forma similar a lo visto en el inciso anterior, en el evento B estarán todos los elementos de S que no están en Q, entonces,

$B = Q^C = \{0, 1, 2, 7, 8\}$ **R//**

c) Definir el evento C: intersección de los eventos P y Q.

Entonces, $C = P.Q$

En C estarán todos los elementos comunes a los eventos P y Q, o sea los elementos que aparecen en ambos eventos, esto es,

$C = P.Q = \{3, 4\}$ **R//**

d) Se define el evento D: unión de los eventos P y Q.

Entonces,

$D = P + Q$

El evento D contendrá los elementos de S que están en P o en Q, y, por tanto,

$D = P + Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **R//**

e) Definir el evento E: complemento del evento C

Entonces, $E = C^C$ y como $C = \{3, 4\}$, en E estarán los elementos de S que no están en C, por lo tanto:

$E = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ **R//**

f) Definir el evento F: complemento del evento D, donde,

$F = D^C$ y como $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces, en F estarán los elementos de S que no están en D, esto es:

$F = \{0, 7, 8\}$ **R//**

g) Debe recordarse que dos eventos mutuamente excluyentes son aquellos que no tienen puntos comunes, o sea que su intersección es el conjunto nulo o vacío y son exhaustivos si ellos cubren todo el Espacio muestral. Entonces:

Los eventos C = {3, 4} y E = {0, 1, 2, 5, 6, 7, 8}, son eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

Por otra parte, los eventos A = {0, 5, 6, 7, 8} y C = {3, 4} son mutuamente excluyente, pero no exhaustivos, pues la unión de ambos no contiene a todos los elementos de S.

PR 1.2. En un experimento aleatorio, los posibles resultados es la secuencia de números enteros, entre 4 y 10, incluyéndolos a ambos. Se han definido los siguientes eventos asociados al experimento:

T = {6, 7, 8} U = {4, 5, 6, 7} y V = {9, 10}

Represente:

a) El Espacio muestral para este experimento aleatorio.

b) El complemento del evento T.

c) El complemento del evento U.

d) La intersección de los eventos T y U.

e) La intersección de los eventos U y V.

f) La unión o suma de los eventos T y U.

g) La unión o suma de los eventos T y V.

h) El complemento de T+U.

Solución

a) El Espacio muestral para este problema puede representarse por: S = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} **R//**

Es un Espacio muestral discreto, finito y numerable.

b) Se define el evento B: complemento del evento T.

Entonces como T = {6, 7, 8}, B = T^C, tendrá todos los elementos de S que no están en T, por tanto:

B = {4, 5, 9,10} **R//**

c) Definir el evento C: complemento del evento U, entonces de forma similar al inciso anterior, se puede plantear, $C = U^C$

Como U = {4, 5, 6, 7}, entonces los elementos de S que no están en U son su complemento y por tanto: C = {8, 9, 10} **R//**

d) Se define el evento D: la intersección de los eventos T y U, Esto es: D = T.U

Y el evento D, contendrá todos los elementos que sean comunes en T y U, o sea, los elementos que estén en T y en U. Entonces, T = {6, 7, 8} y U = {4, 5, 6, 7}, por tanto, D = {6, 7} **R//**

e) Definir el evento E: la intersección de los eventos U y V. Entonces,

E = U.V y contendrá los elementos o puntos muestrales comunes a U y a V.

U = {4, 5, 6, 7} V = {9, 10}

Como puede observarse los eventos U y V no tienen elementos comunes y por tanto su intersección es el conjunto nulo o vacío, esto es, E = {Φ}

Por tanto, puede afirmarse que U y V son eventos mutuamente excluyentes, pero no exhaustivos.

f) Se define el evento F: la unión o suma de los eventos T y U. por tanto el evento F contendrá los elementos que pertenecen a T o a U y esto puede representarse por: F = T + U entonces, T = {6, 7, 8} y U = {4, 5, 6, 7}, por tanto, F = {4, 5, 6, 7, 8} **R//**

g) Se define el evento G: la unión o suma de los eventos T y V.

Entonces, G = T + U y tendrá todos los elementos que pertenecen al evento T o al U, por tanto:

T = {6, 7, 8} y V = {9, 10}, entonces, G = {6, 7, 8, 9, 10} **R//**

h) Definir el evento H: el complemento de T+U, entonces, $H = (T + U)^c = G^C$

El evento H contendrá todos los puntos muestrales que no están en el evento (T + U) = G, por tanto, G = T + U = {6, 7, 8, 9, 10}

H = {4, 5} **R//**

PR 1.3. Las violaciones a la protección medio ambiental, por parte de las empresas en un municipio, tiene un comportamiento aleatorio y el número violaciones en un mes, es un número que está entre 4 y 12.

a) Defina el Espacio muestral para este problema.

Describa los siguientes eventos:

b) Que haya menos de 8 violaciones en un mes.

c) Que haya al menos de 10 violaciones en un mes.

d) Que haya no más de 9 violaciones en un mes.

e) Que haya entre 6 y 9 violaciones en un mes.

f) Que haya más de12 violaciones en un mes.

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos b y e.

h) La unión de los eventos definidos en los incisos b y e.

Solución

a) Como se plantea que el número de violaciones en un mes, es aleatorio, entre los valores de 4 y 12, incluyéndolos a ambos, entonces, el Espacio muestral para este problema se denota por:

S = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11, 12} **R//**

Como se observa este Espacio muestral es discreto, finito y numerable

b) Definir el evento B: que haya menos de 8 violaciones en un mes.

El término menos de 8 implica que este evento no contiene el 8, por tanto, se denota por:

B = {4, 5, 6, 7} **R//**

c) Se define el evento C: que haya al menos 10 violaciones en un mes.

Al menos 10, es similar a 10 o más violaciones, por tanto, este evento se denota por:

C = {10, 11, 12} **R//**

d) Definir el evento D: que haya no más de 9 violaciones en un mes.

No más de 9, es similar a decir 9 o menos, por tanto, este evento se denota por:

D = {4, 5, 6, 7, 8, 9} **R//**

e) Se define el evento E: que haya entre 6 y 9 violaciones en un mes, incluyéndolos a ambos.

Este intervalo contiene todos los puntos muestrales que estén entre los valores de 6 y 9, incluyéndolos a ambos, por tanto: E = {6, 7, 8, 9}

f) Definir el evento F: que haya más de12 violaciones en un mes.

Como el Espacio muestral para este problema está definido entre 4 y 12 violaciones, el evento F es un evento imposible y se representa por el conjunto nulo o vacío, por tanto: F = {Φ}

g) Se define el evento G: la intersección de los eventos B y E, definidos en los incisos b) y e).

El evento G contiene los puntos comunes de los eventos B y E definidos anteriormente, entonces,

B = {4, 5, 6, 7} y E = {6, 7, 8, 9}

Los puntos comunes son 6 y 7 y, por tanto: G = {6, 7}

h) Definir el evento H: la unión de los eventos B y E definidos en los incisos b) y e).

El evento H se define por: H = B + E y este evento contiene todos los elementos que están en los eventos B o E, entonces,

B = {4, 5, 6, 7} y E = {6, 7, 8, 9}, por tanto, H = {4, 5, 6, 7, 8, 9}

PR 1.4. La cantidad de contenedores de desechos sólidos defectuosos en un día en un municipio es aleatoria, con un valor estimado entre 5 y 15 contenedores.

a) Defina para este problema el Espacio muestral.

Represente los siguientes eventos en este problema:

b) Que haya más de 18 contenedores defectuosos en un día.

c) Que haya 8 o más contenedores defectuosos en un día.

d) Que haya menos de 8 contenedores defectuosos en un día

e) ¿Son los eventos definidos en los incisos c) y d) mutuamente excluyentes? ¿Son mutuamente excluyentes y exhaustivos?

f) Que haya exactamente 10 contenedores defectuosos en un día.

g) Que haya entre 8 y 12 contenedores defectuosos en un día.

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos f) y g).

i) La adición o suma de los eventos definidos en d) y g).

Solución

a) El Espacio muestral para este problema se representa por:

S= {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} **R//**

Es un Espacio muestral discreto, finito y numerable

b) Definir el evento B: que haya más de 18 contenedores defectuosos en un día. Como la cantidad máxima de contenedores defectuosos en ese periodo de tiempo, según se muestra en S es 15 piezas, este es un evento imposible para este fenómeno aleatorio y, por tanto: B = {Φ} **R//**

c) Se define el evento C: que haya 8 o más contenedores defectuosos en un día. Este evento se representa por: C = {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} **R//**

d) Definir el evento D: que haya menos de 8 contenedores defectuosos en un día. Este intervalo no incluye el punto 8, por tanto, se representa por: D = {5, 6, 7} **R//**

e) Como puede observarse los eventos C y D no tienen elementos comunes, por tanto, no tienen intersección, es decir, son mutuamente excluyentes. También puede observarse que en la unión de estos eventos están todos los puntos del Espacio Muestral, por tanto, son eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

f) Se define el evento F: que haya exactamente 10 contenedores defectuosos en un día. Este evento está representado por un solo punto de S, o sea: F = {10} **R//**

g) Se define el evento G: que haya entre 8 y 12 contenedores defectuosos, incluyendo los extremos.

Entonces este intervalo puede denotarse por: G = {8, 9, 10,11, 12} **R//**

h) Definir el evento H: la intersección de los eventos F y G.

entonces, H = F.G y contendrá los puntos comunes a los eventos F y G, por tanto:

F = {10} G = {8, 9, 10,11, 12}

H = {10} **R//**

i) Se define el evento I: la adición o suma de los eventos D y G

El evento I contendrá todos los puntos que pertenecen a los eventos D o G. Entonces:

D = {5, 6, 7} y G = {8, 9, 19,11, 12}

por tanto,

I = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} **R//**

PR 1.5. La cantidad de personas para una excursión de ecoturismo que organiza los fines de semana una Agencia de Viajes, es aleatoria y se estima está entre 4 y 16, incluyéndolos a ambos. El ómnibus que utiliza la empresa para esta excursión, tiene 16 asientos.

a) Defina el Espacio muestral para este problema.

Represente los siguientes eventos:

b) Que soliciten la excursión menos de 10 personas.

c) Que soliciten la excursión al menos 8 personas.

d) Que se queden exactamente 6 asientos vacíos en el ómnibus en la excursión.

e) Que queden no más de 4 asientos vacíos en el ómnibus en la excursión.

f) Que el número de reservaciones este entre 10 y 16 personas.

g) El complemento del evento definido en el inciso b.

h) El complemento del evento definido en el inciso e.

i) La intersección de los eventos definidos en los incisos e y f.

j) La intersección de los eventos definidos en los incisos d y f.

k) La unión o suma de los eventos definidos en los incisos e y f.

l) La suma de los eventos definidos en los incisos d y e.

Solución

a) El Espacio muestral para este problema puede representarse por:

S = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} **R//**

Es un Espacio Muestral discreto, finito y numerable

b) Se define el evento B: que soliciten la excursión menos de 10 personas. Entonces,

B = {4, 5, 6, 7, 8, 9} **R//**

Note que menos de 10, no incluye el número 10.

c) Definir el evento C: que soliciten la excursión al menos 8 personas.

Al menos 8 personas, implica que sean 8 o más personas y este evento se define por:

C = {8, 9, 10, 11,12, 13, 14, 15, 16} **R//**

d) Se define el evento D: que se queden exactamente 6 asientos vacíos en el ómnibus en la excursión.

Como el ómnibus tiene 16 asientos, si quedan exactamente 6 vacíos, es equivalente a decir, que van a participar 10 personas exactamente en la excursión, como S representa el número de personas que participan en la excursión, entonces, el evento D se representa por:

D = {10} **R//**

e) Se define el evento E: que queden no más de 4 asientos vacíos en el ómnibus en la excursión.

No más de 4 asientos, es equivalente a que queden, 4 o menos asientos vacíos. Llevando esto al término de pasajeros, que es en lo que está definido el Espacio muestral, implica que tienen que participar en la excursión al menos 12 personas, entonces este evento se representa como:

E = {12, 13, 14, 15, 16} **R//**

f) Definir el evento F: que el número de reservaciones este entre 10 y 16 personas, incluyendo a ambos.

Este evento se denota por:

F = {10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} **R//**

g) Se define el evento G: el complemento del evento B

Como B = {4, 5, 6, 7, 8, 9}, su complemento es, todos los puntos de S que no están en B, entonces,

G = B^C = {10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} **R//**

h) Se define el evento H: El complemento del evento E.

Como E = {12, 13, 14, 15, 16}, su complemento es:

H = E^C = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} **R//**

i) Definir el evento I: la intersección de los eventos E y F. entonces:

I = E.F

Como E = {12, 13, 14, 15, 16} y F = {10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, la intersección es todos los puntos comunes a ambos eventos, esto se representa por:

I = E.F = {12, 13, 14, 15, 16} **R//**

Note que, en este caso, el evento E es un subconjunto del evento F, pues todos sus elementos están contenidos en el evento F.

j) Se define el evento J: la intersección de los eventos D y F. Entonces:

J = D.F

Como D = {10} y F = {10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, ellos solo tienen un punto en común, por tanto,

$J = D.F = \{10\}$ **R//**

En este caso también D es un subconjunto de F y se le denomina evento unitario.

k) Definir el evento K: la unión o suma de los eventos E y F.

La unión o suma debe contener todos los elementos que pertenezcan a E o F. Como $E = \{12, 13, 14, 15, 16\}$ y $F = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ entonces,

$K = E + F = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. **R//**

Como se había comentado anteriormente E es un subconjunto de F y en este caso la suma se corresponde con el evento que contiene al otro como un subconjunto, en este caso F.

l) Se define el evento L: la suma de los eventos D y E.

$L = D + E$

Como $D = \{10\}$ y $E = \{12, 13, 14, 15, 16\}$ su unión o suma se representa por:

$L = D + E = \{10, 12, 13, 14, 15, 16\}$ **R//**

En este caso note que D y E son eventos mutuamente excluyentes.

PR 1.6. La cantidad de ómnibus no disponibles para un día de trabajo en una cooperativa de transporte inter provincial es aleatorio y se estima que son los números enteros entre 0 y 6, incluyéndolos a ambos.

a) Describa el Espacio muestral para este problema.

Describa los siguientes eventos para este problema:

b) Que haya menos de 3 ómnibus no disponibles en un día.

c) Que todos los ómnibus estén funcionando en un día.

d) Que haya no más de 2 ómnibus no disponibles en un día.

e) Que haya entre 1 y 3 ómnibus no disponibles en un día.

f) El complemento del evento definido en el inciso b.

g) El complemento del evento definido en el inciso e.

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos b y c.

i) La intersección de los eventos definidos en los incisos d y e.

j) La unión o adición de los eventos definidos en los incisos b y e.

k) La unión de los eventos definidos en los incisos c e i.

Solución

a) El Espacio muestral para este problema, que se estima son los números enteros entre 0 y 6, incluyéndolos a ambos, se denota por:

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} **R//**

b) Se define el evento B: que haya menos de 3 ómnibus no disponibles en un día.

Menos de 3 significa que son los puntos de S que estén de 2 hacia abajo, incluyéndolo, porque no incluye el número 3, entonces:

B = {0, 1, 2} **R//**

c) Definir el evento C: que todos los ómnibus estén funcionando en un día.

Esto implica que el número de ómnibus no disponible sea igual a cero, entonces, C se denota por:

C = {0} **R//**

d) Se define el evento D: que haya no más de 2 ómnibus no disponibles en un día.

No más de 2 ómnibus no disponibles es similar a decir que haya 2 o menos no disponibles, entonces el evento D se representa por:

D = {0, 1, 2} **R//**

Obsérvese que el evento D es igual al B.

e) Definir el evento E: que haya entre 1 y 3 ómnibus no disponibles, incluyendo a ambos, en un día.

Este evento contempla todos los puntos de S que estén entre 1 y 3, incluyendo a ambos, entonces,

$E = \{1, 2, 3\}$ **R//**

f) Se define el evento F: el complemento del evento B.

entonces, $F = B^C$ y contiene todos los puntos de S que no están en B. Como

$B = \{0, 1, 2\}$, por tanto,

$F = B^C = \{3, 4, 5, 6\}$ **R//**

g) Se define el evento G: el complemento del evento E.

Similar al inciso anterior, se tiene que $G = E^C$, este contiene todos los puntos muestrales que no están en E.

Entonces, $E = \{1, 2, 3\}$, por tanto,

$G = E^C = \{0, 4, 5, 6\}$ **R//**

h) Se define el evento H. La intersección de los eventos B y C, entonces, H = B.C

por tanto, en el evento H están los puntos muestrales comunes de los eventos B y C.

Como $B = \{0, 1, 2\}$ y $C = \{0\}$, por tanto:

$H = B.C = \{0\}$, que es el único punto común en ambos conjuntos. Note que C es un subconjunto o sub evento de B. **R//**

i) Definir el evento I: la intersección de los eventos D y E, entonces,

$I = D.E$

Como $D = \{0, 1, 2\}$ y $E = \{1, 2, 3\}$, los puntos comunes de estos eventos son el 1 y el 2. Por tanto:

$I = D.E = \{1, 2\}$ **R//**

j) Se define el evento J: la unión o adición de los eventos B y E. Entonces:

$J = B + E$

Como $B = \{0, 1, 2\}$ y $E = \{1, 2, 3\}$, la suma de estos eventos contiene todos los puntos muestrales de B o de E, por tanto:

$J = B + E = \{0, 1, 2, 3\}$ **R//**

k) Se define el evento K: la unión de los eventos C e I, entonces,

$K = C + I$

Como, $C = \{0\}$ e $I = \{1, 2\}$. Por tanto, la unión o suma de estos eventos se denota por:

$K = C + I = \{0, 1, 2\}$ **R//**

Note que C e I son dos eventos mutuamente excluyentes.

PR 1.7. La cantidad de fertilizantes que se utiliza cada mes en una pequeña empresa bananera, es una variable aleatoria que se estima está entre las 180 y 300 kg.

a) Represente el Espacio muestral para este problema.

Represente los siguientes eventos:

b) Que la cantidad de fertilizante a usar en un mes sea menor que 150 kg.

c) Que la cantidad de fertilizante a usar en un mes sea mayor o igual que 230 kg.

d) Que la cantidad de fertilizante a usar en un mes esté entre 200 y 280 kg.

e) Que la cantidad de fertilizante a usar en un mes sea al menos 250 kg.

f) El complemento del evento definido en el inciso c

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos c y d.

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos d y e.

i) La suma de los eventos definidos en los incisos c y d.

j) La suma de los eventos definidos en los incisos d y e.

Solución

a) El Espacio muestral es continuo porque el peso de un producto toma un valor en el conjunto de los números reales y su representación fue vista en la sección teórica de este tema.

El Espacio muestral, para este problema, donde la cantidad de fertilizante a usar en un mes puede estar entre 180 y 300 kg, incluyéndolos a ambos, se denota por: $S = \{x_i \in \Re + / 180 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$ **R//**

Esta notación se utilizará para describir los distintos eventos en un Espacio muestral continuo.

b) Se define el evento B: la cantidad de fertilizante a usar en un mes sea menor que 150 kg.

Este evento no existe dentro del Espacio muestral definido para este problema, donde el valor menor es 180kg, por tanto, este es un evento imposible o nulo y se representa por: $B = \{\Phi\}$ **R//**

c) Se define el evento C: la cantidad de fertilizante a usar en un mes sea mayor o igual que 230 kg.

$C = \{x_i \in \Re + / 230 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$**R//**

Es importante destacar que, en el intervalo, hay que poner el límite superior de S.

d) Se define el evento D: la cantidad la cantidad de fertilizante a usar en un mes esté entre 200 y 280 kg.

$D = \{x_i \in \Re + / 200 \leq x_i \leq 280 \text{ t}\}$ **R//**

e) Definir el evento E: la cantidad la cantidad de fertilizante a usar en un mes sea al menos 250 kg.

Como en casos anteriores, al menos 250 kg, significa 250 kg o más, por tanto, este evento se denota por: $E = \{x_i \in \Re + / 250 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$ **R//**

f) Se define el evento F: el complemento del evento C.

En el inciso c) fue definido el evento C como $C = \{x_i \in \Re + / 230 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$

Se sabe que el complemento de un evento está compuesto por todos los puntos de S que no están en dicho evento, entonces; para este caso:

$F = \{x_i \in \Re + / 180 \leq x_i < 230 \text{ kg}\}$ **R//**

Note que como el evento C contiene el valor 230, su complemento no lo excluye y puede tomar hasta el número real, más cercano como se quiera, a 230. Posteriormente se estudiará que en el uso de las probabilidades en

Espacios muestrales continuos, los intervalos pueden ser abiertos o cerrados, pues la probabilidad en un punto siempre es cero.

g) Se define el evento G: la intersección de los eventos C y D.

Esto implica que en el evento G estarán los puntos muestrales comunes de los eventos C y D. entonces: $C = \{x_i \in \Re + / 230 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$ y $D = \{x_i \in \Re + / 200 \leq x_i \leq 280 \text{ kg}\}$

Por tanto: $G = \{x_i \in \Re + / 230 \leq x_i \leq 280 \text{ kg}\}$ **R//**

h) Se define el evento H:la intersección de los eventos D y E.

Anteriormente se definieron los eventos D y E como:

$D = \{x_i \in \Re + / 200 \leq x_i \leq 280 \text{ kg}\}$ y $E = \{x_i \in \Re + / 250 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$

Entonces, la intersección de ambos eventos es: $H = \{x_i \in \Re + / 250 \leq x_i \leq 280 \text{ kg}\}$ **R//**

Que son los valores comunes a ambos eventos.

i) Se define el evento I: la suma de los eventos C y D.

Como: $C = \{x_i \in \Re + / 230 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$ y $D = \{x_i \in \Re + / 200 \leq x_i \leq 280 \text{ kg}\}$

Entonces, el evento I contiene todos los valores del Espacio Muestral que están en C o en D y esto se denota por: $I = \{x_i \in \Re + / 200 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$ **R//**

j) Definir el evento J: la suma de los eventos definidos D y E.

Tal como se hizo en el inciso anterior, el evento J representa todos los valores que pertenecen a los eventos D y E. Entonces:

$D = \{x_i \in \Re + / 200 \leq x_i \leq 280 \text{ kg}\}$ y $E = \{x_i \in \Re + / 250 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$

$J = \{x_i \in \Re + / 200 \leq x_i \leq 300 \text{ kg}\}$ **R//**

Note que los eventos I y J son iguales.

PR 1.8. El consumo mensual de aguade un complejo turístico es una cantidad aleatoria que se estima entre 60 000 y 90 000 L, incluyéndolos a ambos.

a) Represente el Espacio muestral para este problema.

Represente los siguientes eventos:

b) Que el consumo de agua mensual sea superior a los 80 000 L.

c) Que sea inferior a 70 000 L.

d) Que el ingreso mensual esté entre 75 000 y 85 000 L.

e) El complemento del evento definido en el inciso b).

f) El complemento del evento definido en el inciso d).

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y d).

i) La unión o suma de los eventos definidos en los incisos b) y d).

Solución

a) En este problema el Espacio muestral también es infinito y el consumo de agua mensual de ese complejo turístico, se representa por:

$S = \{x_i \in \Re + / 60\,000 \leq x_i \leq 90\,000 \text{ L}\}$ **R//**

b) Se define el evento B: el consumo de agua mensual del complejo turístico sea superior a los 80 000 L. Este evento puede denotarse por:

$B = \{x_i \in \Re + / 80\,000 \leq x_i \leq 90\,000 \text{ L}\}$ **R//**

Tal como se mencionó en el ejercicio anterior, aunque se plantea que sea superior, en el caso de Espacio muestrales infinitos se pondrán los intervalos cerrados, para asumir una norma, esto es mayor o igual.

c) Se define el evento C: que consumo de agua mensual sea inferior a 70 000 L. Entonces este evento puede representarse por: $C = \{x_i \in \Re + / 60\,000 \leq x_i \leq 70\,000 \text{ L}\}$ **R//**

d) Definir el evento D: que el consumo de agua mensual esté entre 75 000 y 85 000 L. D puede denotarse por: $D = \{x_i \in \Re + / 75\,000 \leq x_i \leq 85\,000 \text{ L}\}$ **R//**

e) Se define el evento E: el complemento del evento B. Ya que el evento B fue descrito por $B = \{x_i \in \Re + / 80\,000 \leq x_i \leq 90\,000 \text{ L}\}$, entonces su complemento es el conjunto de todos los valores del Espacio muestral que no pertenecen a B. Por tanto: $E = \{x_i \in \Re + / 60\,000 \leq x_i \leq 80\,000 \text{ L}\}$ **R//**

f) Se define el evento F: el complemento del evento D.

Como D = $\{x_i \in \Re + / 75\ 000 \leq x_i \leq 85\ 000$ L$\}$

En este caso el complemento está compuesto por la unión de dos intervalos, uno por debajo de 75 000 y otro por encima de 85 000, entonces:

F = $\{x_i \in \Re + / 60\ 000 \leq x_i \leq 75\ 000$ L U $85\ 000 \leq x_i \leq 90\ 000$ L$\}$ **R//**

g) Se define el evento G: la intersección de los eventos B y C.

Entonces, B = $\{x_i \in \Re + / 80\ 000 \leq x_i \leq 90\ 000$ L$\}$y C = $\{x_i \in \Re + / 60\ 000 \leq x_i \leq 70\ 000$ L$\}$, puede verse que estos eventos son mutuamente excluyentes, por tanto, no tienen elementos comunes, por lo que su representación es: G = $\{\Phi\}$ R//

O sea, el suceso nulo o vacío y un evento imposible.

h) Se define el evento H: la intersección de los eventos B y D.

Como B = $\{x_i \in \Re + / 80\ 000 \leq x_i \leq 90\ 000$ L$\}$y D = $\{x_i \in \Re + / 75\ 000 \leq x_i \leq 85\ 000$ L$\}$, su intersección es los valores comunes a ambos eventos, por tanto:

H = $\{x_i \in \Re + / 80\ 000 \leq x_i \leq 85\ 000$ L$\}$ **R//**

i) Definir el evento I: la unión o suma de los eventos B y D.

La unión o suma es el evento que contenga todos los valores de B o de D. Entonces, como B = $\{x_i \in \Re + / 80\ 000 \leq x_i \leq 90\ 000$ L$\}$ y D = $\{x_i \in \Re + / 75\ 000 \leq x_i \leq 85\ 000$ L$\}$, el evento I se representa por:

I = $\{x_i \in \Re + / 75\ 000 \leq x_i \leq 90\ 000$ L$\}$ **R//**

PR 1.9. A una tienda los clientes vienen a comprar purificadores de agua y el resultado final es aleatorio con dos opciones: lo compra (C) o no lo compra (N).

Se quiere estudiar este problema aleatorio para dos clientes que arriben sucesivamente,

a) Describa el Espacio muestral para ese problema.

Represente los siguientes eventos:

b) Que ambos compren el purificador de agua.

d) Que el primero que arribe compre el purificador de agua.

e) Que al menos uno compre el purificador de agua.

f) El complemento del evento definido en el inciso d)

g) La intersección de los eventos definidos en c) y d).

h) La unión o suma de los eventos definidos en los incisos b) y d)

i) El complemento del evento definido en el inciso g).

Solución

a) En todos los ejemplos anteriores el Espacio muestral eran conjuntos numéricos. En este problema el Espacio muestral se va a representar por un conjunto de símbolos. El experimento consiste en observar a dos clientes que arriban sucesivamente a la panadería para saber si compran o no compran un tipo de pan. Por tanto, para el primer cliente hay 2 posibles resultados: comprar (C) o no comprar (N). Como se va a estudiar conjuntamente ambos clientes, para el segundo habría dos resultados por cada uno de los del primer cliente, entonces, finalmente hay 4 posibles resultados. Para este tipo de problemas, algunos autores plantean utilizar un árbol que muestra todos los resultados posibles. Para este problema el árbol se muestra en la Figura 5.

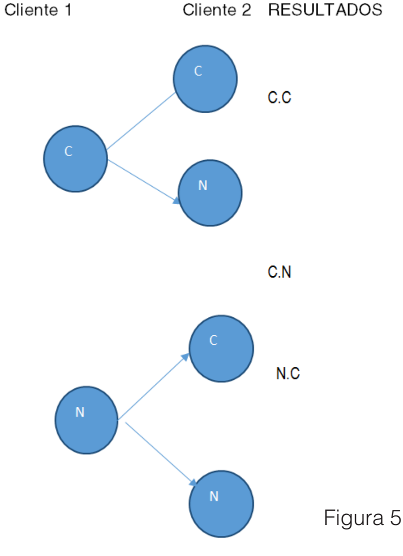


Figura 5. Árbol de resultados del problema resuelto 1.9.

Por tanto, el Espacio muestral para este problema puede denotarse por: S = {C.C, C.N, N.C, N.N} **R//**

b) Definir el evento B: que ambos compren el pan. Este evento se denota por: B = {C.C} **R//**

d) Definir el evento D: que el primero que arribe compre el pan. Este evento se compone de los siguientes puntos muestrales: D = {C.C, C.N} R//

e) Se define el evento E: que al menos uno compre el pan. Este evento se representa por:

E = {C.C, C.N, N.C} **R//**

O sea, compra uno o compran los dos.

f) Se define el evento F: el complemento del evento E.

El complemento del evento E es todos los puntos de S que no están en E, entonces:

F = E^C = {N.N} **R//**

g) Definir el evento G: la intersección de los eventos D y E

La intersección de ambos eventos, son los puntos comunes que tienen esos eventos, entonces, si D = {C.C, C.N} y E = {C.C, C.N, N.C}, tendrán los dos primeros puntos en común, por tanto:

G = D.E = {C.C, C.N} **R//**

h) Se define el evento H:la unión o suma de los eventos B y D.

La unión o suma viene dado por todos los puntos de ambos conjuntos que pertenezcan a B o D. Entonces B = {C.C} y D = {C.C, C.N}, la suma de ambos es:

H = B + D = {C.C, C.N} **R//**

Note que B es un subconjunto de D, lo cual implica que H = D.

i) Se define el evento I: complemento del evento G.

Entonces: I = G^C y como G = {C.C, C.N}, por tanto: I = {N.C, N.N} **R//**

PR 1.10. A un equipo de futbol le quedan 3 juegos por efectuar en la actual temporada. Cada juego tiene solo dos resultados, ganar o perder, ya que el empate no está permitido. El resultado de cada juego es aleatorio.

a) Defina el Espacio muestral para este problema.

Defina los siguientes eventos:

b) El equipo gana exactamente un juego de los restantes.

c) Gana el primer juego

d) Gana al menos 2 juegos de los restantes.

e) El complemento del evento definido en el inciso b.

f) El complemento del evento definido en el inciso d.

h) La unión o suma de los eventos definidos en los incisos b y c.

i) La intersección de los eventos definidos en los incisos b y e.

Solución

a) Se dibuja el árbol de resultados de este problema, denotando Ganar (G) y Perder (P). Este se muestra en la Figura 6.

Entonces, este problema tiene un Espacio Muestral con 8 posibles resultados, de forma tal que:

S = {G.G.G, G.G.P, G.P.G, G.P.P, P.G.G, P.G.P, P.P G, P.P.P}

b) Se define el evento B: el equipo gana exactamente un juego de los restantes. Los puntos muestrales de S que cumplen con esa condición son tres y este evento se representa como:

B = {G.P.P, P.G.P, P.P.G}

c) Se define el evento C: gana el primer juego. Este evento se representa por:

C = {G.G.G, G.G.P, G.P.G, G.P.P}

d) Se define el evento D: gana al menos 2 juegos de los restantes.

Este evento se denota por:

D = {G.G.G, G.G.P, G.P.G, P.G.G}

e) Definir el evento E: el complemento del evento B.

El complemento de B está formado por todos los puntos de S que no están en B, y como B fue definido por B = {G.P.P, P.G.P, P.P.G}, entonces

E = B^C = {G.G.G, G.G.P, G.P.G, P.G.G, P.P.P}

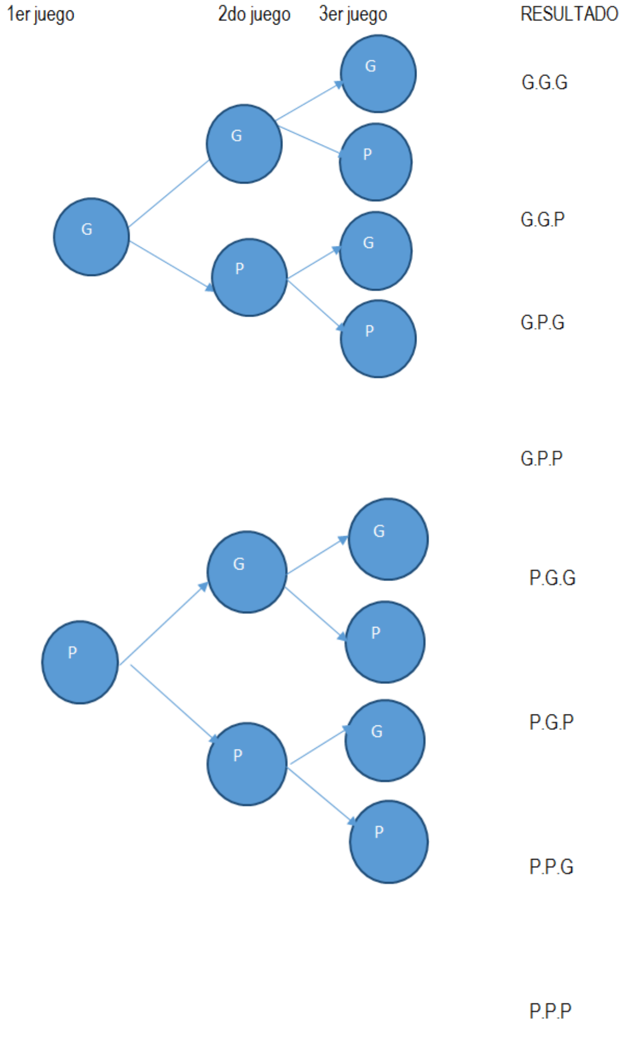


Figura 6. Árbol de decisión para el Problema resuelto 1.10.

e) Definir el evento E: el complemento del evento B.

El complemento de B está formado por todos los puntos de S que no están en B, y como B fue definido por B = {G.P.P, P.G.P, P.P.G}, entonces

$E = B^C$ = {G.G.G, G.G.P, G.P.G, P.G.G, P.P.P}

f) Se define el evento F: el complemento del evento D.

Entonces:

$F = D^C$ y como D = {G.G.G, G.G.P, G.P.G, P.G.G}

Por tanto: F = {G.P.P, P.G.P, P.P G, P.P.P}

h) Se define el evento H:la unión o suma de los eventos B y C.

Se pide determinar $H = B + C$

Entonces, B = {G.P.P, P.G.P, P.P G} y C = {G.G.G, G.G.P, G.P.G, G.P.P}, la suma o unión es todos los puntos que pertenecen a B o a C, por tanto:

H = {G.P.P, P.G.P, P.P.G, G.G.G, G.G.P, G.P.G, G.P.P}

i) Definir el evento I: la intersección de los eventos B y E.

Entonces, B = {G.P.P, P.G.P, P.P.G} y $E = B^C$ = {G.G.G, G.G.P, G.P.G, P.G.G, P.P.P}, por tanto, estos eventos son mutuamente excluyentes, es decir, no tienen puntos comunes, no hay intersección y por tanto:

$I = \{\Phi\}$

O sea, el evento imposible o conjunto vacío.

1.6. Problemas propuestos para solución

PP 1.1. Sean los eventos A y B definidos en S, siendo estos:

A = {0, 1, 2, 3} B = {2, 3, 4} S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Represente los siguientes eventos o sucesos:

a) Complemento del evento A.

b) Complemento del evento B.

c) Intersección de A y B

d) Suma de A o B

e) Complemento de la suma de A o B

f) ¿Son la intersección de A y B y el complemento de B eventos mutuamente excluyentes?

PP 1.2. Sea B = $\{x_i \in \Re + / 1\,200 \leq x_i \leq 2\,000\}$ y D = $\{x_i \in \Re + / 1\,600 \leq x_i \leq 2\,400\}$, definidos en

S = $\{x_i \in \Re + / 1\,000 \leq x_i \leq 2\,400\}$

Represente los siguientes eventos:

a) Complemento del evento B.

b) Complemento del evento D.

c) Intersección de los eventos B y D.

d) Complemento de la intersección de B y D.

e) Suma de B o D.

f) Complemento de la suma de B o D.

PP 1.3. Un municipio desarrolla un conjunto de proyectos de Desarrollo local, pero algunos de estos no se culminan en el tiempo programado. Basados en datos históricos, la cantidad de proyectos que no culminan en el tiempo programado es aleatorio y su valor es entre 0 y 8 proyectos.

a) Represente el Espacio muestral para este problema.

Defina los siguientes eventos:

b) Que no se atrase ningún proyecto.

c) Que no se culminen en tiempo como máximo 3 proyectos.

d) Que la cantidad de que no se culminen en tiempo esté entre 1 y 3.

e) El complemento del evento definido en el inciso c).

f) La intersección de los eventos definidos en los incisos c) y d).

g) La suma de los eventos definidos en los incisos b) y d).

h) El complemento del evento suma definido en el inciso g).

PP 1.4. El número de autos que en un día arriban a una pequeña lubricadora es aleatorio y se ha estimado que está entre 3 y 9 autos, incluyéndolo a ambos.

a) Represente el Espacio muestral para este problema.

Denote los siguientes eventos:

b) Que lleguen más de 5 autos en un día.

c) Que arriben entre 4 y 6 autos en un día.

d) Que arriben al menos 4 autos.

e) El complemento del evento definido en el inciso b).

f) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y d).

h) La suma de los eventos definidos en los incisos b) y d).

PP 1.5. La demanda de tortas en una panadería cada día es aleatoria y se estima que se encuentra entre 2 y 10 tortas, incluyéndolo a ambos.

a) Denote el Espacio muestral para este problema.

Represente los siguientes eventos:

b) Que la demanda en un día este por debajo de 5 tortas.

c) Que se soliciten 7 o más tortas e un día.

d) Que la demanda esté entre 5 y 8 tortas en un día.

e) El complemento del evento definido en el inciso b).

f) El complemento del evento definido en el inciso d).

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos c) y d).

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

i) La suma de los eventos definidos en los incisos c) y d).

j) La suma de los eventos definidos en los incisos b) y d).

PP 1.6. En un aula que tiene 12 alumnos, la cantidad de ellos que no aprueban en la asignatura de Estadística es aleatorio.

a) Defina el Espacio muestral para este problema.

Denote los siguientes eventos:

b) Que no aprueben menos de la mitad del grupo.

c) Que no aprueben no más de 4 alumnos.

d) Que no aprueben entre 4 y 6 alumnos, incluyéndolos a ambos.

e) El complemento del evento definido en el inciso c).

f) El complemento del evento definido en el inciso d).

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos c) y d).

h) La suma de los eventos definidos en c) y d).

PP 1.7. Las reservaciones para una excursión de ecoturismo los domingos es una cantidad aleatoria entre 10 y 20, incluyéndolo a ambos.

a) Describa el Espacio muestral para este problema.

Defina los siguientes eventos:

b) Que haya entre 5 y 8 reservaciones, incluyéndolo a ambos.

c) Que haya más de 15 reservaciones.

d) Que haya como mínimo 12 reservaciones.

e) Que haya como máximo 15 reservaciones

e) El complemento del evento definido en el inciso c).

f) La intersección de los eventos definidos en los incisos c) y d).

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos c) y e).

h) La suma de los eventos definidos en los incisos c) y e).

PP 1.8. La generación de desechos sólidos diaria en una ciudad es aleatoria y se ha estimado que está entre 80 y 120 toneladas.

a) Represente el Espacio muestral de este problema.

Defina los siguientes eventos para la cantidad de desechos sólidos que se genera en un día:

b) Que sea menor que 70 toneladas.

c) Que sea más de 100 toneladas.

d) Que sea menor o igual que 90 toneladas.

e) Que este entre 95 y 100 toneladas.

f) El complemento del evento definido en el inciso b)

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y d).

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos e) y f).

i) La suma o unión de los eventos definidos en los incisos d) y e).

j) La suma o adición de los eventos definidos en los incisos c) y e).

k) Seleccione un par de eventos definidos anteriormente que sean mutuamente excluyentes.

PP 1.9. El tiempo de servicio en una consultoría ambiental, es aleatorio y se estima entre 8 y 15 días.

a) Represente el Espacio muestral para este problema.

Denote los siguientes eventos:

b) Que demore al menos 10 días la consultoría ambiental.

c) Que demore entre 11 y 13 días la consultoría ambiental.

d) Que demore como máximo 12 díasconsultoría ambiental.

e) El complemento del evento definido en el inciso a).

f) El complemento del evento definido en el inciso c).

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y d).

i) La suma de los eventos definidos en los incisos b) y c).

j) La suma de los eventos definidos en los incisos c) y d).

PP 1.10. El peso de un paquete de café de 250 gramos a la salida de la línea de envase, es aleatorio, y su desviación está entre 246 y 254gramos. El estándar de calidad para ese producto fija que el mismo debe estar entre 248.5 y 251.5 gramos.

a) Represente el Espacio muestral para este problema.

Represente los siguientes eventos:

b) Que el paquete esté por debajo del límite inferior del estándar de calidad.

c) Que el paquete esté por encima del límite superior del estándar de calidad.

d) Que el paquete cumpla con el estándar de calidad establecido para el peso de un paquete.

e) Que el paquete incumpla el estándar de calidad establecido para el peso de un paquete.

f) El complemento del evento definido en el inciso b).

g) El complemento del evento definido en el inciso c).

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

i) La suma de los eventos definidos en los incisos d) y e).

PP 1.11. La cantidad de lluvia que cae en un determinado territorio en la temporada de seca, es aleatoria, entre 90 y 150 mm de lluvia.

a) Represente el Espacio muestral para este problema.

Describa los siguientes eventos:

b) Que llueva menos de 120 mm.

c) Que llueva más de 100 mm.

d) Que la lluvia caída se comporte entre 110 y 130 mm.

e) El complemento del evento definido en el inciso b).

f) El complemento del evento definido en el inciso d).

g) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

h) La intersección de los eventos definidos en los incisos c) y d).

i) La suma de los eventos definidos en los incisos b) y c).

j) La suma de los eventos definidos en los incisos c) y d).

PP 1.12. Los alumnos de 1er año de una carrera de Licenciatura en Gestión Ambiental tienen dos posibilidades: aprobar o no aprobar el año. Si se seleccionan 3 de estos alumnos, para analizar sus resultados, defina el Espacio Muestral para este problema.

Represente los siguientes eventos:

a) Que exactamente dos de los alumnos estén aprobados.

b) Que todos estén aprobados.

c) Que al menos haya dos aprobados.

d) El complemento del evento definido en c).

e) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

f) La intersección de los eventos definidos en los incisos a) y b).

g) La suma de los eventos definidos en los incisos a) y b).

PP 1.13. En una línea de producción existe un punto de control de calidad del producto terminado. Cada producto inspeccionado puede tener tres posibles resultados aleatorios: que el producto sea bueno (B), que el producto se mande a reelaborar (R) o que el producto sea defectuoso y se rechace (D). Si se realizara un experimento del control a dos productos seleccionados de esta línea de producción,

a) Represente el Espacio muestral para este problema.

Defina los siguientes eventos:

b) Al menos un producto es bueno.

c) Los dos productos tienen la misma clasificación.

d) El primer artículo es bueno y el otro tiene cualquier clasificación.

e) El complemento del evento definido en el inciso a).

f) La intersección de los eventos definidos en los incisos a) y c).

g) Loa intersección de los eventos definidos en c) y d).

h) La unión de los eventos definidos en los incisos a) y b).

i) La unión de los eventos definidos en los incisos c) y d).

PP 1.14. En una competencia de tiro al blanco, la final es entre 3 competidores, cada uno tiene dos posibles resultados: dar en el blanco o fallar.

a) Defina el Espacio muestral para este problema.

Definir los siguientes eventos:

b) Que los 3 den en el blanco.

c) Que exactamente dos den en el blanco.

d) Que al menos uno de en el blanco.

e) El complemento del evento definido en el inciso d).

f) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

g) La suma de los eventos definidos en los incisos b) y c).

PP 1.15. Dos personas optan por ocupar plazas en una empresa de consultoría medio ambiental y tienen 3 opciones posibles: ser aceptados, ser rechazados, mandarlos a un curso de capacitación.

a) Defina el Espacio muestral para este problema.

Represente los siguientes eventos:

b) Que al menos uno sea aceptado.

c) Que ambos sean rechazados.

d) Que ambos sean aceptados o enviados a capacitación.

e) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y d).

f) La intersección de los eventos definidos en los incisos b) y c).

g) La suma de los eventos definidos en los incisos b) y d).

h) El complemento del evento definido en el inciso g).

Capítulo II. Cálculo de la probabilidad de un evento

2.1. Definición de la probabilidad de un evento.

Como se mencionó en el Capítulo anterior, la probabilidad está asociado al estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Se requiere por tanto un procedimiento que nos permita calcular la probabilidad, o sea un valor numérico que nos valore la posibilidad de ocurrencia de un evento determinado en un experimento aleatorio. Este Capítulo se dedicará a este objetivo y además de las definiciones y fórmulas para calcular las probabilidades, se estudiarán otros procedimientos para el cálculo de problemas más complejos donde estén presente varios eventos.

Existen distintas definiciones de probabilidad que se han ido desarrollando históricamente. La primera definición que se conoce como definición clásica, aparece a finales del Siglo XVII y relacionada a los juegos de azar de aquellos momentos. En la actualidad también se le conoce como probabilidad a priori, porque se va a aplicar a aquellos fenómenos aleatorios en el cual se puede conocer a priori los resultados que se pueden obtener.

2.1.1. Definición clásica o a priori.

Si S es un Espacio muestral equiprobable (hay igual probabilidad de aparición de cada resultado) entonces la probabilidad de ocurrencia de un evento A, P(A), se define como: (Hernández, et al., 2007)

$P(A)= N(A) / N(S)$

Donde:

N(A): Número de puntos muestrales pertenecientes al evento A.

N(S): Número de puntos muestrales que tiene el Espacio Muestral S.

De la definición se puede concluir intuitivamente que:

$0 \leq P(A) \leq 1$ La probabilidad de un evento es un número entre cero y uno.

$P(S) = 1$ La probabilidad para todo el Espacio Muestral es la unidad.

$P(\Phi) = 0$ La probabilidad del evento imposible o nulo es igual a cero.

$P (A + B) = P(A) + P(B)$ si A y B son eventos mutuamente4 excluyentes.

2.1.2. Problemas resueltos de aplicación de la definición clásica de probabilidades

PR 2.1. Se lanza un dado de 6 caras perfectamente balanceado. Calcule la probabilidad que:

a) Salga un número par.

b) Salga un número menor o igual que 3.

c) Salga un número mayor o igual que 5.

d) Salga un número impar.

SOLUCIÓN:

El Espacio muestral de este experimento consta de 6 puntos equiprobables, o sea con igual posibilidad de aparición y por tanto es aplicable la Definición Clásica de Probabilidad. Por tanto,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$N(S)=6$

a) Sea A: Evento que salga un número par. Entonces:

$A = \{2, 4, 6\}$

$N(A) = 3$

Entonces la probabilidad que salga un número par es:

$P(A)= N(A)/ N(S) = 3/6 = 0.50$

$P(A) = 0.50$ **R//**

b) Sea define el evento B: que salga un número menor o igual que 3. Entonces:

$B = \{1, 2, 3\}$

$N(B) = 3$

$P(B) = N(B)/ N(S) = 3/6 = 0.50$

$P(B) = 0.50$ **R//**

c) Se define el evento C: Que salga un número mayor o igual que 5.

C = {5, 6}

N(C) = 2

P(C) = 2/6 = 0.3333

P© = 0.3333

d) Se define el evento D: que salga un número impar

D = {1, 3, 5}

P(D) = 3/6 = 0.5

P(D) = 0.5 **R//**

PR 2.2. En un aula hay 20 estudiantes, de los cuales 12 son mujeres y 16 aprobaron la prueba de estadística. Si se selecciona un estudiante al azar, calcule la probabilidad que:

a) Sea una mujer.

b) Sea un estudiante que haya desaprobado la prueba de Estadística.

c) Sea un hombre.

Solución

Este problema puede resolverse aplicando la Definición Clásica de Probabilidad, ya que todos los estudiantes del grupo tienen igual posibilidad de ser seleccionado. El tamaño del Espacio muestral N(S) = 20 ya que hay 20 estudiantes en el grupo

a) Definir el evento A: Que salga una mujer

N(A) = 12 pues hay 12 mujeres en el grupo, entonces:

P(A) = N(A)/N(S) = 12/ 20 = 0.60

P(A) = 0.60 **R//**

b) Se define el evento B: Que el estudiante haya desaprobado la asignatura de Estadística.

El dato que se tiene es que de 20 alumnos, 16 aprobaron Estadística, por tanto 4 desaprobaron.

N(B) = 4

P(B) = N(B)/N(S) = 4/ 20 = 0.20

P(B) = 0.20 **R//**

c) Se define el evento C: que el estudiante seleccionado sea hombre.

Siguiendo un razonamiento similar al del inciso anterior, se puede deducir que en el aula hay 8 hombres. Por tanto:

N(C) = 8

P(C) = N(C)/N(S) = 8/ 20 = 0.40

P(C) = 0.40 **R//**

2.1.3. Métodos de conteo para el cálculo de probabilidades en espacios muestrales finitos y equiprobables

En el capítulo anterior se desarrollaron problemas donde el experimento consistía en varias pruebas y cuyos resultados se podían representar por medio de un árbol de resultados (ver ejemplos resueltos 2.9 y 2.10).

Cuando pueden ocurrir varios resultados en cada experimento no es fácil encontrar estos desarrollando un árbol de resultados. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado de seis caras 3 veces, hay un total de 216 resultados; dibujar este árbol sería muy complejo.

Para poder calcular el tamaño de los Espacios muestrales y de los eventos de interés para estos casos se utiliza las fórmulas de conteo, las cuales se estudian en Teoría combinatoria. Solo trataremos los casos de interés para este texto.

Considere un experimento que se realiza n veces y cuyo resultado puede representarse por:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

Donde x_1 puede ocurrir de n_1 formas distintas, x_2 puede ocurrir de n_2 formas distintas y así hasta x_n puede ocurrir de n_n formas distintas. De esta forma el número total de resultados de este experimento viene dado por Hernández, et al. (2007):

$n_1 \times n_2 \times n_3 x.....n_n$

que es el principio fundamental de conteo.

De este principio fundamental se derivan distintas expresiones de acuerdo a como se realice el experimento y esto se verá con el siguiente ejemplo: en una urna se colocan 4 bolas rojas, 5 azules y 6 blancas, lo que hace un total de 15 bolas en la urna y se van a extraer tres aleatoriamente para ver el color de cada bola. El total de resultados depende de cómo se realice la extracción de las bolas y se verá 3 formas distintas.

I. Muestreo con reemplazamiento ordenado (Hernández, et al., 2007).

Se extraen las bolas una a una y cada bola que se extrae se vuelve a colocar en la urna. Para la primera extracción hay 15 bolas en la urna. Por tanto, habrá 15 posibilidades para esta primera extracción, 15 posibilidades para la segunda extracción y 15 para la tercera y el total de resultados de este experimento, puede calcularse aplicando el principio fundamental de la siguiente forma:

Tamaño de S = N(S) = $n_1 \times n_2 \times n_3$ = 15 x 15 x 15 = 3 375 posibles resultados

Se puede estar interesado en estudiar el evento A: Que las 3 bolas extraídas sean rojas

$A = \{x_1; x_2; x_3 / x_1 = x_{2 =} x_3 = 1,2,3,4\}$

Aplicando el principio del conteo, el número de puntos muestrales que cumplen con el evento será:

N(A) = 4 x 4 x 4 = 64

Y la probabilidad de A aplicando la definición clásica es:

P(A) = 64 / 3 375 = 0.0189

Se puede definir otro evento B: que la primera bola sea roja y las otras dos de cualquier color. Este evento puede representarse como:

$B = \{ x_1; x_2; x_3 / x_1 = 1,2,3,4,\ x_{2 =} x_3 = 1,2,3,\ldots,15)$

Aplicando el principio de conteo para este caso se tendrá: para la primera bola hay 4 posibilidades, pues la bola tiene que ser roja; para la segunda bola puede ser de cualquier color y hay 15 bolas en la urna e idénticamente sucede con la extracción de la tercera bola, por tanto:

N(B) = 4 x 15 x 15 = 900

Y la probabilidad de B es:

P(B) = 900 / 3 375 = 0.2666

B = $\{x_1; x_2; x_3 / x_1 = 1,2,3,4 ; x_2 = x_3 = 1,2,\ldots, 15\}$

II. Muestreo sin reemplazamiento ordenado (Hernández, et al., 2007)

Para este caso se extraen las bolas una a una, pero la bola extraída no retorna a la urna. Para el ejemplo que se viene desarrollando, aplicando el principio de conteo en este caso para calcular el tamaño del Espacio muestral, hay 15 bolas para la primera extracción, 14 para la segunda extracción y 13 para la tercera extracción y entonces:

N(S) = 15 x 14 x 13 = 2 730

Calculando el tamaño del evento A definido anteriormente que las 3 bolas sean rojas, hay 4 bolas para la primera extracción, para la segunda quedarán 3 bolas rojas en la urna y para la tercera solo hay 2 bolas rojas y entonces:

A = $\{x_1; x_2; x_3 / x_1 = 1,2,3,4; x_2 = 1,2,3 ; x_3 = 1,2\}$

N(A) = 4 x 3 x 2 = 24

Y P(A) = 24/ 2 730 = 0.0087

Para el cálculo de la probabilidad que la primera sea blanca y las otras dos de cualquier color, para la primera hay 4 posibilidades pues la bola tiene que ser roja, para la segunda puede ser de cualquier color, pero quedan 14 bolas en la urna e idénticamente pasa para la tercera extracción, pero como ya se sacaron dos bolas, quedaran 13 en la urna. Por tanto:

N(B) = 4 x 14 x 13 = 728

P(B) = 728 / 2 730 = 0.2666

En este tipo de problemas, el principio de conteo es similar al resultado que se obtiene al aplicar la fórmula de las permutaciones para una muestra de tamaño n desde M elementos. Esto se denota por:

$_{M}P_{n} = M!/ (M-n)!$

En el ejemplo, para calcular el tamaño de S se aplica:

${}_{15}P_3$ = 15! / (15 – 3)! = 15! / 12! = 15x14x13 = 2 730

Para el tamaño del evento A se aplica:

${}_4P_3$ = 4! / (4 – 3)! = 4! / 1! = 4 x 3 x 2 = 24

Se deja a consideración del lector emplear el principio general de conteo o la fórmula de las permutaciones.

III. Muestreo sin reemplazamiento no ordenado (Hernández, et al., 2007)

Para este tipo de problema, quizás el más utilizado en la práctica, el orden de aparición no es importante y todas las bolas de la muestra se extraen simultáneamente, o sea en el ejemplo se extraen las 3 bolas de la urna en una sola extracción.

Para calcular el tamaño de S y de los eventos en este caso se aplicará la fórmula de la Combinatoria, que permite determinar cuántos subconjuntos de tamaño n pueden formarse con m elementos.

$${}_MC_n = \frac{M!}{(M-n)!\,n!}$$

O sea, el factorial de M dividido entre el producto del factorial de M –n y el factorial de n.

Para el ejemplo de la urna que se viene desarrollando, se tiene que el tamaño del Espacio muestral es el número de subconjuntos de tamaño 3 que puedan obtenerse de 15 elementos y entonces:

$${}_{15}C_3 = \frac{15!}{(15-3)!\,3!} = \frac{15!}{12!\;3!} = \frac{15 \ x\ 14\ x\ 13}{3x2x1} = 2730/6 = 455$$

N(S) = 455

Para el caso del evento A (que las 3 bolas sean blancas), como hay 4 bolas blancas, N(A) es dado por:

$$N(A) = {}_4C_3 = \frac{4!}{1!\;3!} = 4$$

Y P(A) = 4/ 455 = 0.0087

Para el caso del evento B (que la primera sea blanca y las otras dos de cualquier color), hay que considerar que de las 4 bolas blancas hay que extraer una y las otras 2 se extraen de los 14 restantes y entonces:

$N(B) = {}_4C_1 \times {}_{14}C_2 = \frac{4!}{3!\ 1!} \times \frac{14!}{12!\ 2!} = 4 \times 91 = 364$

$P(B) = 364/455 = 0.8000$

2.1.4. Problemas resueltos utilizando las fórmulas de conteo

PR 2.3. Un dado de 6 caras, perfectamente balanceado, se lanza 3 veces. Calcule la probabilidad que:

a) En los tres lanzamientos salga un número par.

b) En los tres lanzamientos salga un número impar.

c) En el primero salga un número mayor o igual que 5 y en el resto un número par.

d) En el primer lanzamiento salga un número 6 y en el resto un número igual o menor que 2.

Solución

Primero se debe calcular el tamaño del Espacio muestral para este problema. Como se realiza 3 lanzamientos y en cada uno puede haber 6 posibles valores,

$S = \{ x_1, x_2, x_3 / x_i = 1,2,3,4,5,6 \text{ para } i = 1,2,3\}$

Aplicando el principio general de conteo, se tiene:

$N(S) = n_1 \times n_2 \times n_3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ posibles resultados

a) Se define el evento A: que salga un número para en los 3 lanzamientos.

$A = \{ x_1, x_2, x_3 / x_i = 2, 4, 6 \text{ para } i = 1,2,3\}$, entonces:

$N(A) = 3 \times 3 \times 3 = 27$

Aplicando la definición clásica de probabilidad:

$P(A) = N(A) / N(S) = 27 / 216 = 0.1250$

$P(A) = 0.1250$ **R//**

b) Se define el evento B: en los tres lanzamientos salga un número impar.

$B = \{ x_1, x_2, x_3 / x_i = 1, 3, 5 \text{ para } i = 1,2,3\}$, entonces:

$N(B) = 3 \times 3 \times 3 = 27$

Aplicando la definición clásica de probabilidad:

$P(B) = N(B) / N(S) = 27 / 216 = 0.1250$

$P(B) = 0.1250$ **R//**

c) Definir el evento C: en el primero salga un número mayor o igual que 5 y en el resto un número par.

Entonces:

$C = \{ x_1, x_2, x_3 / x_1 = 5, 6 \text{ y } x_i = 2, 4, 6 \text{ para } i = 2,3\}$

Por tanto, para este caso $n_1 = 2$ y $n_2 = n_3 = 3$ y aplicando la fórmula de conteo:

$N(C) = 2 \times 3 \times 3 = 18$

Aplicando la definición clásica de probabilidad:

$P(C) = N(C) / N(S) = 18/ 216 = 0.0833$

$P(C) = 0.0833$ **R//**

d) Se define el evento D: en el primer lanzamiento salga un número 6 y en el resto un número igual o menor que 2.

$D = \{ x_1, x_2, x_3 / x_1 = 6 \text{ y } x_i = 1, 2 \text{ para } i = 2,3\}$

Entonces, $n_1 = 1$ y $n_2 = n_3 = 2$

$N(D) = 1 \times 2 \times 2 = 4$

$P(D) = N(D) / N(S) = 4 / 216 = 0.0185$

$P(D) = 0.0185$ **R//**

PR 2.4. En un almacén hay 15 acondicionadores de aire, de los cuales 4 están defectuosos. Si se presentan 3 clientes para adquirir este electrodoméstico y se van sacando uno a uno estos equipos del almacén, calcule la probabilidad que:

a) Los 3 seleccionados no tengan defectos.

b) Que el primero sea defectuoso y los otros 2 buenos.

c) Los 3 son defectuosos.

d) Que exactamente 2 sean buenos.

Solución

En este problema para cada acondicionador de aire que se saca del almacén puede haber dos resultados: que sea bueno (B) o que sea defectuosos (M). Hay 11 acondicionadores en buen estado y 4 defectuosos y el muestreo es sin reemplazamiento ordenado.

El Espacio muestral puede representarse de la siguiente forma:

$S = \{x_1; x_{2;} x_3 / x_1 = 1, 2, 3 ....., 15, x_2 = 1,2,... 14,_; x_3 = 1,2,..., 13\}$

Esto es, hay 15 acondicionadores en total para la primera salida del almacén, para la segunda quedarán 14, puesto que el primero queda fuera y de forma similar para la tercera salida quedarán 13.

Por tanto, aplicando la fórmula de conteo para este tipo de muestreo para calcular el tamaño del Espacio muestral, se tendría que, $n_1 = 15$, $n_2 = 14$ y $n_3 = 13$, entonces

$N(S) = n_1 \times n_2 \times n_3 = 15 \times 14 \times 13 = 2\ 730$

a) Se define el evento A: los 3 acondicionadores seleccionados no tengan defectos. Este evento pude representarse por:

$A = \{x_1; x_2; x_3 / x_1 = 1, 2, ...,11\ x_{2\ =} 1, 2, ...,10; x_3 = 1, 2, ..., 9\}$

Ya que para la primera salida hay 11 acondicionadores buenos, para la segunda quedan en el almacén 10 acondicionadores buenos, ya que el primero fue bueno y por el mismo razonamiento para la tercera salida del almacén quedarán 9 acondicionadores buenos.

Por tanto, $N(A) = 11 \times 10 \times 9 = 990$

$P(A) = N(A) / N(S) = 990 / 2\ 730 = 0.3626$

$P(A) = 0.3626$ **R//**

b) Se define el evento B: que el primer acondicionador sea defectuoso y los otros 2 buenos.

Este evento puede representarse por:

$B = \{x_1; x_2; x_3 / x_1 = 1, 2, 3, 4; x_2 = 1, 2, \ldots, 11; x_3 = 1, 2, \ldots, 10\}$

Hay 4 posibilidades de seleccionar un acondicionador defectuoso en la primera extracción, 11 buenos para la segunda salida del almacén y finalmente para la tercera salida quedan 10 acondicionadores buenos dado que el anterior fue bueno.

Entonces:

N(B) = 4 x 11 x 10 = 440

P(B) = 440 / 2 730 = 0.1611

P(B) = 0.1611 **R//**

c) Se define el evento C: los 3 acondicionadores son defectuosos.

Este problema tiene similar razonamiento al del inciso a, esto es, para la primera salida hay 4 acondicionadores defectuosos, para la segunda quedarán 3 y para la tercera solo 2. Por tanto:

N(C) = 4 x 3 x 2 = 24

P(C) = 24 / 2 730 = 0.0087

P(C) = 0.0087 **R//**

d) Se define el evento D: que exactamente 2 sean buenos.

Este evento podría descomponerse en 3 sub eventos mutuamente excluyentes:

D_1: que los dos primeros sean buenos y el tercero defectuoso.

D_2: que el primero y el último sean buenos y el segundo defectuoso.

D_3: que el primero sea defectuoso y los dos últimos buenos

Donde $D = D_1 + D_2 + D_3$, o sea, la unión de esos tres sub eventos.

Entonces aplicando las fórmulas de conteo:

$N(D_1) = 11 \times 10 \times 4 = 440$

$N(D_2) = 11 \times 4 \times 10 = 440$

$N(D_3) = 4 \times 11 \times 10 = 440$

Y $N(D) = N(D_1) + N(D_2) + N(D_3) = 1\,320$

Por tanto:

$P(D) = N(D) / N(S) = 1\,320 / 2\,730 = 0.4835$

$P(D) = 0.4835$ **R//**

PR 2.5. En un Proyecto de Desarrollo Local quiere integrarse un equipo de cuatro personas para un proyecto hidráulico. Hay 12 personas que cumplen todos los requisitos, de los cuales 7 son mujeres y 5 son hombres. Si se selecciona los cuatro aleatoriamente de los disponibles de uno en uno, calcule la probabilidad que:

a) Los cuatro sean mujeres.

b) Los cuatro sean hombres.

c) Los cuatro sean del mismo sexo.

d) Que exactamente la mitad del equipo sea mujer.

Solución

El Espacio muestral para este problema puede representarse por:

$S = \{x_1; x_{2;} x_{3;} x_4 / x_1 = 1, 2, \ldots, 12; x_2 = 1, 2\ldots, 11; x_3 = 1, 2\ldots, 10; x_4 = 1, 2\ldots,9\}$

Entonces puede calcularse el tamaño de S aplicando la fórmula de conteo para un muestreo sin reemplazamiento ordenado, el que es:

$S = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11\,880$

a) Se define el evento A: los cuatro seleccionados son mujeres.

$A = \{x_1; x_{2;} x_{3;} x_4 / x_1 = 1, 2, \ldots, 7; x_2 = 1, 2\ldots, 6; x_3 = 1, 2\ldots, 5\ x_4 = 1, 2,3,4\}$

O sea, hay 7 posibilidades para seleccionar la primera mujer, habrá 6 posibilidades para la selección de la segunda, 5 para la tercera y 4 para la cuarta, entonces la cantidad de puntos muestrales que componen este evento es:

N(A) = 7 x 6 x 5 x 4 = 840

Y la probabilidad de A viene dado por:

P(A) = N(A) / N(S) = 840 / 11 880 = 0.0707

P(A) = 0.0707 **R//**

b) Se define el evento B: los cuatro seleccionados son hombres.

La representación del evento B sería similar al de A, variando solamente los valores de $x_{1,}$ $x_{2,}$ $x_{3,\ y}$ x_4 asociado a la cantidad de hombres en el grupo de selección. Entonces el tamaño del evento B es:

N(B) = 5 x 4 x 3 x 2 = 120

La probabilidad de B puede calcularse por:

P(B) = N(B) / N(S) = 120 / 11 880 = 0.0101

P(B) = 0.0101 **R//**

c) Se define el evento C: que los seleccionados sean del mismo sexo.

Para que los cuatro seleccionados sean del mismo sexo los cuatro tienen que ser mujeres u hombres y entonces el evento C es la suma o unión de los eventos A y B, los que son mutuamente excluyentes y entonces:

C = A + B

Aplicando las propiedades de la probabilidad, se tiene:

P(C) = P(A) + P(B) = 0.0707 + 0.0101 = 0.0808

P(C) = 0.0808 **R//**

d) Se define el evento D: que exactamente la mitad del equipo sea mujer.

Este evento puede descomponerse en 4 eventos que lo integran y que son mutuamente excluyentes. Si denotamos las mujeres por M_i y los hombres por H_i, siendo i la selección donde aparece, entonces:

$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$

Donde:

$D_1 = \{M_1;M_2;H_3;H_4\}$, entonces $N(D_1) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

$D_2 = \{H_1;M_2;M_3;H_4\}$ entonces $N(D_2) = 5 \times 7 \times 6 \times 4 = 840$

$D_3 = \{H_1;H_2;M_3;M_4\}$ entonces $N(D_3) = 5 \times 4 \times 7 \times 6 = 840$

$D_2 = \{M_1;H_2;H_3;M_4\}$ entonces $N(D_1) = 7 \times 5 \times 4 \times 6 = 840$

Entonces:

$N(D) = N(D_1)+ N(D_2) + N(D_3) + N(D_4) = 3\,360$

Por tanto:

$P(D) = N(D) / N(S) = 3\,360 / 11\,880 = 0.2828$

$P(D) = 0.2828$ **R//**

PR 2.6. Suponga que, en el problema anterior, las 4 personas a seleccionar se hubieran escogido todos de una vez. Calcule la probabilidad que:

a) Los cuatro sean mujeres.

b) Los cuatro sean hombres.

c) Los cuatro sean del mismo sexo.

Solución

Para este problema lo que cambia es que el muestreo es sin reemplazamiento no ordenado y entonces hay que aplicar la fórmula de la Combinatoria para calcular el tamaño del Espacio muestral y de los eventos.

Entonces, como hay 12 personas de las que se van a seleccionar 4, el tamaño del Espacio muestral es:

$$N(S) = {}_{12}C_4 = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

a) Se define el evento A: que las 4 sean mujeres.

Entonces hay que calcular la cantidad de conjuntos de tamaño 4 que pueden formarse con las 7 mujeres que hay en el grupo y entonces:

$$N(A) = {}_{7}C_4 = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

Entonces:

P(A) = 35/ 495 = 0.0707

P(A) = 0.0707 **R//**

b) De forma similar al inciso anterior hay que calcular la cantidad de conjuntos de 4 hombres que pueden formarse con los 5 que hay en el grupo de selección, entonces, se define el evento B: que todos sean hombres.

$N(B) = {}_5C_4 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$

Entonces:

P(B) = N(B) / N(S) = 5 / 495 = 0.0101

P(B) = 0.0101 **R//**

c) La solución de este inciso es similar a lo que se planteó en el problema anterior. Utilizando la propiedad de que la probabilidad de la suma de dos eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de estos eventos, se tiene que:

C = A + B

P(C) = P(A) + P(B) pues A y B son mutuamente excluyentes

Entonces:

P(C) = P(A) + P(B) = 0.0707 + 0.0101 = 0.0808

P(C) = 0.0808 **R//**

PR 2.7. Se desea realizar un estudio de los sistemas de protección medio ambiental implementados en las empresas de un territorio y se han seleccionado 20 empresas, de las cuales 8 son pequeñas y el resto medianas empresas. Si se seleccionan 5 de ellas al azar para iniciar el estudio, determine la probabilidad que:

a) Todas sean medianas empresas.

b) Todas sean pequeñas empresas.

c) Que al menos una empresa sea mediana.

Solución

La selección de las 5 empresas es por medio de un muestreo sin reemplazamiento no ordenado y por tanto se utilizará la fórmula de la Combinatoria para determinar el tamaño del Espacio muestral y los eventos a estudiar.

Entonces la cantidad de puntos muestrales que componen el Espacio muestral S viene dado por:

${}_{20}C_5 = \dfrac{20!}{15!\,5!} = \dfrac{20x19x18x17x16}{5x4x3x2x1}$ = 912 puntos muestrales

a) Se define el evento A: que todas las empresas seleccionadas sean medianas.

Como hay 12 empresas medianas entre las 20 seleccionadas para el estudio, el tamaño del evento A puede calcularse por:

${}_{12}C_5 = \dfrac{12!}{7!\,5!} = \dfrac{12x11x10x9x8}{5x4x3x2x1}$ = 72 puntos muestrales que cumplen con esa condición.

Entonces:

P(A) = N(A) / N(S) = 72 / 912 = 0.0789

P(A) = 0.0789 **R//**

b) De forma similar, se define el evento B: que todas las empresas de la muestra sean pequeñas empresas.

Entonces como en las 20 empresas hay 8 pequeñas, el tamaño de B puede ser calculado por:

${}_{8}C_5 = \dfrac{8!}{3!\,5!} = \dfrac{8x7x6}{3x2x1}$ = 56

La probabilidad de B se calcula por:

P(B) = N(B) / N(S) = 56 / 912 = 0. 0614

P(B) = 0.0614 **R//**

c) Se define el evento C: que al menos haya una empresa mediana

Que haya al menos una empresa mediana implica que de las 5 que van a ser estudiadas, hay una, dos, tres, cuatro o cinco empresas medianas.

Puede concluirse que los únicos puntos muestrales que no cumplen con esta condición es que las 5 sean pequeñas empresas, entonces N(C) puede calcularse por:

N(C) = N(S) – N(B) = 912 – 56 = 856

Entonces la probabilidad de C es:

P(C) = N(C) / N(S) = 856 / 912 = 0.9385

P(C) = 0.9385 **R//**

2.1.5. Definición frecuencial o empírica.

Cuando existe información histórica del comportamiento de un evento aleatorio puede calcularse su probabilidad utilizando esa información. Por ejemplo, si se ha realizado un experimento para medir, si los desechos gaseosos en una industria tienen contaminantes por encima de lo permitido, la probabilidad puede calcularse por el cociente del número de veces que se ha sobrepasado el límite permisible entre la cantidad de pruebas realizadas. Esto es, la probabilidad frecuencial o empírica no es más que la frecuencia relativa de un evento visto en Estadística Descriptiva.

Es la definición más utilizada en la práctica, siempre que el número total de pruebas realizadas sea suficientemente grande para que se logre estabilidad en el valor de esa estimación. La probabilidad de la lluvia en determinada zona y temporada, de la cantidad de artículos defectuosos en una línea de producción, del tiempo de servicio en una operación bancaria, etc., son ejemplos de aplicación de esta definición. Walpole, Myers, Myers & Keying (2012), definen la probabilidad frecuencial como "la probabilidad de un evento (que suceda o que resulte) es la proporción de veces que el evento sucedería en una serie prolongada de experimentos repetidos".

La definición puede formalmente enunciarse como:

Sea A un evento definido en un experimento aleatorio, la probabilidad de ocurrencia de este evento, en un número n suficientemente grande de este experimento, puede estimarse por su frecuencia relativa, esto es:

$P(A) = f_r(A) = N(A)/n$

Donde:

P(A): Probabilidad de ocurrencia del evento A.

$f_r(A)$: Frecuencia relativa de ocurrencia del evento A.

N(A): Número de veces que ocurrió el evento A.

n: Cantidad de pruebas realizadas.

De forma intuitiva puede deducirse algunas propiedades de la probabilidad calculada por esta definición:

- P(A) siempre es un número que está en el intervalo de 0 a 1, esto es:

  $0 \leq P(A) \leq 1$

- Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces:

  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

- La probabilidad del evento nulo o imposible es cero.

  $P(\Phi) = 0$

A continuación, algunos ejemplos de la aplicación de esta definición.

2.1.6. Problemas resueltos de aplicación de la definición frecuencial de probabilidades

PR 2.8. En un establecimiento de venta de pan, se ha realizado una muestra de 100 clientes y se ha determinado la cantidad de ellos que ha solicitado cada tipo de pan, lo que se muestra en la siguiente tabla:

TIPO DE PAN	CORTEZA SUAVE	SUAVE DULCE	INTEGRAL
FRECUENCIA	40	35	25

Cuál es la probabilidad de que un cliente que llegue a la dulcería solicite:

a) Pan suave dulce.

b) Pan integral.

c) Pan de corteza suave o suave dulce.

Solución

Para este problema se han realizado 100 observaciones de los clientes que arriban a la panadería a solicitar pan, por tanto, n = 100.

a) Se define el evento A: que el cliente solicite pan suave dulce. Entonces:

N(A) = 35 Cantidad de clientes que solicitan el pan dulce.

Aplicando la definición frecuencial de probabilidad se tendrá:

$P(A) = f_r(A) = N(A)/n = 35/100 = 0.35$

P(A) = 0.35 **R//**

b) Se define el evento B: que el cliente solicite pan integral. De la tabla de datos puede observarse que 25 clientes solicitaron este tipo de pan, entonces, aplicándola definición clásica de probabilidad:

P(B) = N(B)/n = 25/100 = 0.25

c) Se define el evento C: que los clientes soliciten pan de corteza suave o suave dulce

Según los datos del problema, hay 40 clientes que solicitan pan de corteza suave y 35 suave dulce, por lo que habrá un total de 75 clientes que adquieran estos dos tipos de pan. Entonces aplicando una vez más la definición clásica de probabilidad, se obtiene:

N(C) = 40 + 35 = 75

P(C) = N(C)/n = 75/100 = 0.75

P(B) = 0.75 **R//**

PR 2.9. Una empresa que produce muebles metálicos, ha tenido en los últimos meses un alto número de productos rechazados y ha tomado una muestra aleatoria de 200 muebles rechazados en el último trimestre, para analizar los problemas de calidad que han conllevado al rechazo de los mismos, evaluando tres aspectos: abolladuras en los productos, problemas de pintura y problemas con el cierre. En cada mueble estudiado se ha clasificado solo una de estas 3 causas de posible rechazo y se ha obtenido la siguiente información:

DEFECTO DETECTADO	ABOLLADURA	PINTURA	CIERRE
FRECUENCIA OBSERVADA	54	102	44

Determine la probabilidad que:

a) Los muebles sean rechazados por problema de pintura.

b) Sean rechazados por cierre.

c) Que presenten defectos de abolladura o de cierre.

Solución

En este problema se han realizado 200 observaciones, por lo que n = 200, que es el denominador de la definición clásica de probabilidades

a) Se define el evento A: los muebles son rechazados por problemas de pintura. Entonces N(A) = 102 y aplicando la definición frecuencial:

$P(A) = f_r(A) = N(A)/n = 102/200 = 0.51$

P(A) = 0.51 **R//**

O sea, hay un 51% de posibilidades que el mueble sea rechazado por problemas de pintura.

b) Definir el evento B: sean rechazados por cierre. Entonces:

N(B) = 44

P(B) = N(B)/n = 44/200 = 0.22

P(B) = 0.22 **R//**

La probabilidad que un mueble sea rechazado por problemas de cierre es de 0.22.

c) Se define el evento C: que el mueble sea rechazado por problemas de abolladura o de cierre. Entonces N(C) = 54 + 44= 98

P(C) = N(C)/n = 98/200 = 0.49

P(C) = 0.49 **R//**

O sea, entre ambas causas hay una probabilidad de 0.49 que el mueble sea rechazado.

De forma similar está definición puede aplicarse a Espacios Muestrales continuos o infinitos, como se verá en el siguiente ejemplo:

PR 2.10. El tiempo que demora el estudio de la contaminación del aire por una empresa es aleatorio. Se ha realizado un estudio, midiendo el tiempo de 150 clientes, construyéndose la siguiente tabla de frecuencias:

INTERVALO	INTERVALO EN DÏAS	FRECUENCIA
1	$20 \leq T \leq 30$	65
2	$31 \leq T \leq 40$	38
3	$41 \leq T \leq 50$	32
4	Más de 50	15

Con esa información determine la probabilidad que el servicio el estudio a una empresa demore:

a) Entre 31 y 40 días.

b) Más de 50 días.

c) 40 días o menos.

d) Entre 31 y 50 días.

Solución

La cantidad de observaciones en este experimento aleatorio es de 150 empresas, por lo que n = 150.

a) Se define el evento A: tiempo que demora el estudio de la contaminación está entre 31 y 40 días.

De la tabla de datos puede observarse que el intervalo 2 está asociado a este evento y por tanto, la frecuencia de ocurrencia de este intervalo fue para 38 clientes y entonces N(A) = 38 y la probabilidad asociada a este evento puede calcularse por:

$P(A) = f_r(A) = N(A)/n = 38/150 = 0.25$

$P(A) = 0.25$ **R//**

O sea, la probabilidad que el tiempo que demora el estudio de la contaminación esté entre 31 y 40 minutos es de 0.25.

b) Se define el evento B: tiempo que demora el estudio de la contaminación sea más de 50 minutos. Este evento está asociado al intervalo 4 de la tabla de datos, entonces N(B) = 15 y la probabilidad para este evento será:

P(B) = N(B)/n = 15/150 = 0.10

P(B) = 0.10 **R//**

Esto es, la probabilidad de que el tiempo que demora el estudio de la contaminación sea más de 50 días es de 0.10

c) Definir el evento C: tiempo que demora el estudio de la contaminación sea 40 días o menos

Note que este evento incluiría las frecuencias observadas para los intervalos 1 y 2 de la tabla de datos y por tanto:

N(C) = 65 + 38 = 103 empresas

Entonces la probabilidad para este evento puede calcularse por:

P(C) = N(C)/n = 103/150 = 0.69

P(C) = 0.69 **R//**

d) Se define el evento D: tiempo que demora el estudio de la contaminación sea entre 31 y 50 días.

De forma similar al inciso anterior la cantidad de frecuencia observada para este evento está integrada por la suma de las frecuencias de los intervalos 2 y 3 de la tabla de datos y entonces:

N(D) = 38 +32 = 70

Y la probabilidad para este evento puede ser calculada por:

P(D) = N(D)/n = 70/150 = 0.47

P(D) = 0.47 **R//**

Por tanto, la probabilidad que el tiempo que demora el estudio de la contaminación este entre 31 y 50 días es de 0.47

2.1.7. Propiedades de la probabilidad de un evento

A partir de loa axiomas que debe cumplir la probabilidad de un evento (Walpole et al., 2012) pueden describirse un grupo de propiedades que deben cumplirse al calcular las probabilidades de eventos. Estas son:

- La probabilidad del evento nulo o no cierto es cero.

  $P(\phi) = 0$

- Probabilidad del evento cierto (todo el espacio muestral).

  $P(S) = 1$

- Probabilidad de un evento A cualquiera definido en S

  $0 \leq P(A) \leq 1$

- Probabilidad del complemento de A

  $P(A^c) = 1 - P(A)$

- Probabilidad de la unión de 2 eventos disjuntos o mutuamente excluyentes

  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ Donde $A.B = \varphi$

Esta propiedad puede generalizarse para k eventos mutuamente excluyentes.

- Probabilidad de la unión de 2 eventos

  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

- Si B es un subconjunto de A ($B \subset A$), entonces:

  $P(B) \leq P(A)$

2.1.8. Problemas resueltos aplicando las definiciones y propiedades de probabilidad

PR 2.11. En un almacén hay 20 TV y 10 refrigeradoras. Si hubiera 2 equipos defectuosos de cada tipo, calcule la probabilidad que al seleccionar uno al azar de cada tipo:

a) El TV sea defectuoso.

b) El TV sea bueno.

c) La refrigeradora sea buena.

Solución

Como el muestreo se ha realizado al azar, se puede asumir que hay igual probabilidad de cada equipo para ser seleccionado y se puede aplicar la definición clásica de probabilidad.

a) Para el caso de los TV, el tamaño del Espacio muestral N(S) = 20.

Se define el evento A: Que el TV seleccionado sea defectuosos y como hay 2 TV defectuosos, entonces N(A) = 2 y aplicando la definición clásica de probabilidades:

P(A) = N(A) / N(S) = 2 / 20= 0.10

P(A) = 0.10 **R//**

b) Este inciso puede resolverse directamente como el anterior. Se define el evento B: que el TV seleccionado sea bueno. Entonces N(B) = 18, pues hay 18 TV en buen estado en el almacén y la probabilidad puede calcularse por:

P(B) = N(B) / N(S) = 18/20 = 0.90

P(B) = 0.90 **R//**

También podría resolverse aplicando la propiedad del complemento, ya que el evento B es el complemento de A, o sea:

$B = A^C$

$P(B) = P(A^C) = 1 – P(A) = 1 – 0.10 = 0.90$

c) Se define el evento C: que la refrigeradora seleccionada sea buena.

En este caso en el almacén hay 10 refrigeradoras y por tanto N(S) = 10. Como de ellas hay 8 buenas, entonces N(C) = 8 y:

P(C) = N(C) = 8/10 = 0.8

P(C) = 0.80 **R//**

PR 2.12. Una cooperativa se transporte dedicada al ecoturismo, tiene 10 microbuses para brindar sus servicios, de los cuales como promedio hay 2 fuera de servicio cada día. La cantidad de equipos según su capacidad, en asientos para pasajeros, se muestra en la siguiente tabla:

ASIENTOS DISPONIBLES	8	12	24
CANTIDAD DE MICROBUSES	2	6	2

Con esa información, si se selecciona un microbús al azar para un viaje en un día, calcule la probabilidad que:

a) Pueda realizar el viaje.

b) Que no pueda realizar el viaje

c) Que sea un microbús de 12 asientos.

d) Que sea un microbús de al menos 12 asientos.

Solución

Este es un problema sencillo de aplicación de la definición clásica de probabilidad, ya que existe igual probabilidad de seleccionar un microbús.

a) Se define el evento A: que se pueda realizar el viaje.

Esto implicaría seleccionar uno de los 8 microbuses que están disponibles cada día, ya que de 10 hay 2 fuera de servicio. Por tanto:

$P(A) = N(A) / N(S) = 8 / 10 = 0.80$ **R//**

b) se define el evento B: que no se pueda realizar el viaje.

Para calcular esta probabilidad puede utilizarse nuevamente la definición clásica y se tiene:

$P(B) = N(B) / N(S) = 2 / 10 = 0.20$ **R//**

También podría utilizarse la propiedad del complemento, ya que:

$B = A^C$

$P(B) = P(A^C) = 1 – P(A) = 1 – 0.80 = 0.20$ **R//**

c) Se define el evento C: que sea un microbús de 12 asientos.

De forma similar a los incisos anteriores puede aplicarse la definición clásica. Como del total de 10 microbuses hay 6 que tienen 6 asientos, entonces:

$P(C) = N(C) / N(S) = 6 / 10 = 0.60$ **R//**

d) Se define el evento D: que tenga al menos 12 asientos.

Al menos 12 asiento implica que tenga 12 o 24 asientos y el total de puntos muestrales que cumplen con esta condición son 8. Entonces aplicando la definición clásica:

P(D) = N(D) / N(S) = 8/10 = 0.80 **R//**

También puede resolverse de la siguiente forma:

Definir E: que tenga 24 asientos

Entonces:

P(E) = N(E) / N(S) = 2/10 = 0.20

Aplicando la propiedad de la suma de dos eventos mutuamente excluyente se tiene que:

D = C + E

P(D) = P(C) + P(E) = 0.60 +0.20 = 0.80

P(D) = 0.80 **R//**

Y las respuestas por ambas vías es idéntica.

PR 2.13. Una empresa de fertilizantes nitrogenados envasa el fertilizante en sacos de 100 libras, pero el peso real es aleatorio y los resultados de un largo muestreo de 1000 sacos y se han obtenido resultados que se muestran en la tabla.

INTERVALO DE PESO (LIBRAS)	FRECUENCIA
98 -99	40
99.1-100	425
100.1 -101	480
101.1-102	55

Calcule la probabilidad que el peso de un saco este:

a) Entre 99.1 y 100 lb.

b) Entre 98 y 99 lb.

c) Que pese 100 libras o menos

d) Que pese más de 100 lb.

Solución

Al existir un estudio frecuencial de la ocurrencia del peso para cada intervalo, en este problema hay que aplicar la definición frecuencial de probabilidades. El total de observaciones realizadas es n= 1 000

a) Se define el evento A: que el peso del saco esté entre 99.1 y 100 lb.

De la Tabla de datos se observa que N(A) = 425 por lo que aplicando la definición frecuencial se tiene:

P(A) = N(A) / n = 425/1 000 = 0.425

P(A) = 0.425 **R//**

b) Se define el evento B: que el peso del saco esté entre 98 y 99 lb.

Similar al inciso anterior hay 40 sacos de los mil estudiados que cumplen con esta condición, por tanto:

N(B) = 40

P(B) = N(B) / n = 40/1 000 = 0.040

P(B) = 0.040 **R//**

c) Se define el evento C: que pese 100 libras o menos.

El evento C es la suma o unión de los eventos A y B, o sea:

C = A + B

Como A y B son mutuamente excluyentes, aplicando la propiedad de la suma se tiene:

P(C) = P(A) + P(B) = 0.425 + 0.040 = 0.465

P(C) = 0.465 **R//**

d) Definir el evento D: que pese más de 100 lb.

Note que el evento D es el complemento del evento C. Por tanto, aplicando la propiedad del complemento de un evento:

$D = C^C$

$P(D) = P(C^C) = 1 – P(C) = 1 – 0.465 = 0.535$

$P(D) = 0.535$ **R//**

PR 2.14. Un operador de mantenimiento de la depuradora de agua de un hotel escuela está cambiando los filtros malos y en una caja le han entregado 24 filtros de los cuales 4 son defectuosos. Si para una depuradora se requiere de dos filtros y los selecciona de la caja uno a uno, determine la probabilidad que:

a) Ambos sean buenos.

b) Ambos sean defectuosos.

c) Que el primero sea defectuoso y el otro sea bueno.

d) Que el primero sea defectuoso y el segundo de cualquier tipo.

e) Que uno sea defectuoso y el otro bueno.

Calcule el inciso a y b suponiendo que el obrero saca los dos bombillos al mismo tiempo.

Solución

Este problema es de un muestreo sin reemplazamiento ordenado, donde se realizan 2 extracciones. Como hay 24 filtros en la caja, el Espacio Muestral puede representarse por:

$S = \{x_1, x_2 / x_1 = 1,2,3,\ldots,24; x_2= 1,2,3,\ldots 23\}$

Por lo que, utilizando las fórmulas de conteo el tamaño de S se calcula como:

$N(S) = 24x23 = 552$

$N(S) = 552$

a) Definir el evento A: que ambos filtros seleccionados de la caja sean buenos. Como en la caja hay 20 filtros buenos, para la primera extracción habrá 20 oportunidades de seleccionar uno y para la segunda, si el primero es bueno, quedarán en la caja 19 filtros buenos, entonces, el evento A puede denotarse por:

$A = \{x_1, x_2 / x_1 = 1,2, 3, \ldots,20; x_2= 1,2, 3, \ldots,19\}$

Utilizando las fórmulas de conteo:

$N(A) = 20x19 = 380$

$N(A) = 380$

Y aplicando la definición clásica de probabilidad:

$P(A) = N(A) / N(S) = 380/552 = 0.6884$

$P(A) = 0.6884$ **R//**

b) Se define el evento B: que ambos sean defectuosos.

Como hay 4 filtros defectuosos en la caja, el evento B puede representarse por:

$B = \{x_1, x_2 / x_1 = 1,2,3,4; x_2= 1,2,3\}$

Por tanto, aplicando las fórmulas de conteo:

$N(B) = 4x3 = 12$

La probabilidad de B es:

$P(B) = N(B) / N(S) = 12/552 = 0.0217$

$P(B) = 0.0217$ **R//**

c) Se define el evento C: que el primero sea defectuoso y el segundo bueno

Entonces el evento C puede denotarse por:

$C = \{x_1, x_2 / x_1 = 1,2,3,4; x_2= 1,2,3,\ldots,20\}$

Porque hay 4 posibilidades para la primera extracción de que el filtro sea defectuoso y para la segunda se mantienen los 20 filtros buenos en la caja y hay 20 posibilidades. Por tanto:

$N(C) = 4x20 = 80$

$P(C) = N(C) / N(S) = 80/ 552 = 0.1449$

$P(C) = 0.1449$ **R//**

d) Se define el evento D: que el primero sea defectuoso y el segundo de cualquier tipo.

En este caso hay 4 posibilidades para la primera extracción y como quedan en la caja 23 filtros entre defectuosos y buenos habrá 23 posibilidades para la 2da extracción. Entonces D puede representarse como:

$D = \{x_1, x_2 / x_1 = 1,2,3,4; x_2 = 1,2,3,\ldots,23\}$

Por tanto: $N(D) = 4x23 = 92$

Y la probabilidad, aplicando la definición clásica, se calcula por:

$P(D) = N(D) / N(S) = 92/552 = 0.1667$

$P(D) = 0,1667$ **R//**

e) Definir el evento E: que uno sea defectuoso y el otro bueno.

Hay 2 puntos muestrales que cumplen con la condición del evento E, estos son: que el primero sea bueno y el segundo defectuoso o la inversa, que el primero sea defectuoso y el segundo bueno. Por tanto, definamos los eventos E_1 y E_2:

$E_1 = \{x_1, x_2 / x_1 = 1,2,3,4; x_2 = 1,2, 3,\ldots,20\}$

$E_2 = \{x_1, x_2 / x_1 = 1,2, 3,\ldots, 20; x_2 = 1,2,3,4\}$

Entonces aplicando las fórmulas de conteo:

$N(E_1) = 4x20 = 80$

$N(E_2) = 20x4 = 80$

Y aplicando la definición clásica de probabilidad:

$P(E_1) = 80/552 = 0.1449$

$P(E_2) = 80/ 552 = 0.1449$

Aplicando la propiedad de la suma de dos eventos:

$E = E_1 + E_2$

$P(E) = P(E_1) + P(E_2) = 0.1449 + 0.1449 = 0.2898$

$P(E) = 0.2889$

En el caso que el obrero extraiga los dos filtros de la caja al mismo tiempo, entonces el muestreo es sin reemplazamiento no ordenado y hay que aplicar la fórmula de combinatoria para esta situación. El tamaño del Espacio Muestral para este problema es la combinatoria de 24 elementos tomados en grupos de dos:

$$N(S) = {}_{24}C_2 = \frac{24!}{22!\,2!} = \frac{24x23}{2x1} = 276$$

Se define el evento F: que ambos filtros sean buenos

Como hay 20 filtros buenos en la caja, habría que seleccionar los dos de ese conjunto y la cantidad de puntos muestrales del evento F sería la combinatoria de 20 elementos tomados en grupos de dos, o sea:

$$N(F) = \frac{20!}{18!\,2!} = \frac{20x19}{2x1} = 190$$

Y la probabilidad del evento F es:

P(F) = 190/276 = 0.6884

P(F) = 0.6884 **R//**

Para el caso que los dos sean defectuosos, se define el evento G: que ambos filtros sean defectuosos, entonces:

$$N(G) = {}_{4}C_2 = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4x3}{2x1} = 6$$

La probabilidad del evento G es:

P(G) = 6/276 = 0.0217

P(G) = 0.0217 **R//**

Note que para estos dos eventos el muestreo sin reemplazamiento ordenado y sin orden tienen el mismo valor para sus probabilidades.

PR 2.15. El tiempo de carga de un buque en un puerto es aleatorio y de un estudio de 100 buques se ha llegado a consolidar la siguiente información:

INTERVALO DE TIEMPO EN DIAS	CANTIDAD DE BUQUES
3- 4.99	12
5 -6.99	26
7-8.99	44
9 o más días	18

Con esa información calcule la probabilidad que:

a) El buque demore 9 o más días en la descarga.

b) Que demore entre 7 días y menos de 9.

c) Que demore 7 días o más

d) Que demore menos de 7 días.

Solución

Como los datos obtenidos parten de un estudio frecuencial de ocurrencia, se aplicará la definición frecuencial de probabilidad con n = 100 buques.

a) Definir el evento A: que el buque demore 9 o más días en la descarga.

De los datos recopilados puede verse que hay 18 buques que cumplen con esta condición; por tanto:

N(A) = 18

P(A) = N(A) / n = 18/100 = 0.18

P(A) = 0.18 **R//**

b) Se define el evento B: que la descarga del buque demore entre 7 días y menos de 9.

Puede observarse de la tabla de datos que hay 44 buques que están dentro de ese intervalo de tiempo y aplicando la definición frecuencial de probabilidad se tiene:

N(B) = 44

P(B) = N(B) / n = 44/100 = 0.44

P(B) = 0.44 **R//**

c) Se define el evento C: que la descarga del buque demore entre 7 días o más.

El evento C es la unión o suma de los eventos A y B definidos anteriormente, entonces:

$C = A + B$

Como A y B son mutuamente excluyentes, aplicando la ´propiedad de la suma de dos eventos, se tiene que:

$P(C) = P(A) + P(B) = 0.18 + 0.44 = 0.62$

$P(C) = 0.62$ **R//**

e) Se define el evento D: que la descarga del buque demore menos de 7 días.

Puede deducirse que menos de 7 días, es el complemento de 7 días o más y por tanto el evento D puede denotarse como: $D = C^C$

Y aplicando la propiedad de la probabilidad del complemento de un evento, se tiene que:

$P(D) = P(C^C) = 1 – P(C) = 1 – 0.62 = 0.38$

$P(D) = 0.38$ **R//**

PR 2.16. En una mochila se han guardado 5 manzanas, 4 guayabas y 6 naranjas. Si en un descuido se cae la mochila y la misma está abierta y se salen 3 frutas, calcule la probabilidad que:

a) Las 3 sean manzanas.

b) Las 3 sean manzanas o naranjas.

c) Las 3 sean frutas iguales.

SOLUCIÓN

Note que este tipo de problemas es similar al de una urna con bolas de 3 colores y se puede asumir que es un muestreo sin reemplazamiento no ordenado y por tanto para calcular el tamaño del Espacio Muestral y los eventos hay que aplicar la fórmula de la combinatoria.

El tamaño del Espacio Muestral para este problema viene dado por la combinatoria de 15 (el total de frutas en la mochila) tomados en subconjuntos de tamaño 3, que es el número de frutas que se salen de la mochila. Entonces:

$$N(S) = {}_{15}C_3 = \frac{15!}{12!\,3!} = \frac{15x14x13}{3x2x1} = 2730$$

a) Se define el evento M: que las 3 frutas salidas de la mochila sean manzanas.

El tamaño de este evento viene dado por:

$N(M) = {}_5C_3 = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5x4}{2x1} = 10$

Por tanto, la probabilidad del evento A puede calcularse por:

P(A) = N(M) / N(S) = 10/2730 = 0.0037

P(A) = 0.0037 **R//**

b) Se solicita calcular la probabilidad de que las 3 frutas salidas de la mochila sean manzanas o naranjas. Se define el evento NR: que las 3 frutas salidas de la mochila sean naranjas. Note que los eventos M y NR son mutuamente excluyentes y se puede aplicar la propiedad de la suma de probabilidades para calcular la probabilidad solicitada, esto es:

P(M + NR) = P(M) + P(NR)

La probabilidad de N se calcula de forma similar a la de M y es:

$N(NR) = {}_6C_3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6x5x4}{3x2x1} = 20$

P(NR) = N(NR) / N(S) = 20/2730 = 0.0073

Sustituyendo las probabilidades calculadas para cada evento en la expresión de la suma de probabilidades, se tiene:

P(M + NR) = P(M) + P(NR) = 0.0037 + 0.0073 = 0.0110

P(M + NR) = 0.0110 **R//**

c) Se solicita calcular la probabilidad de que las 3 frutas sean manzanas o naranjas o guayabas. Si se define el evento G: que las 3 frutas salidas de la mochila sean guayabas, entonces la probabilidad solicitada puede calcularse aplicando la propiedad de la probabilidad de la suma de eventos mutuamente excluyentes, esto es:

P(M + NR + G) = P(M) + P(NR) + P(G)

Los dos primeros términos de la derecha de la ecuación anterior fueron calculados previamente, por lo que solo queda calcular la probabilidad de que las 3 frutas sean guayabas y una vez más, aplicando la fórmula de la combinatoria, se tiene:

$N(G) = {}_4C_3 = \dfrac{4!}{1!\,3!} = \dfrac{4}{1} = 4$

Y aplicando la definición de probabilidad:

$P(G) = N(G) / N(S) = 4/ 2730 = 0.0015$

Por tanto:

$P(M + NR + G) = P(M) + P(NR) + P(G) = 0.0037 + 0.0073 + 0.0015 = 0.0125$

$P(M + NR + G) = 0.0125$ **R//**

PR 2.17. En un municipio, hay, 12 proyectos grandes y 8 pequeños. Si se escoge un proyecto al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un proyecto grande?

Si se seleccionan dos proyectos aleatoriamente, uno primero y el otro después, cuál es la probabilidad que:

b) Que ambos sean grandes.

c) Que uno sea grande y el otro pequeño.

d) Que al menos uno sea grande.

Si se selecciona 4 proyectos al azar para una inspección del estado de su avance, cuál es la probabilidad que:

e) Que todos sean pequeños

f) Que todos sean grandes

Solución

a) Este inciso plantea un problema simple de cálculo de probabilidades utilizando la definición clásica pues se seleccionará un proyecto al azar de un grupo total de 20, 12 grandes y 8 pequeños.

Se define el evento A: que el proyecto seleccionado sea grande.

Entonces: $N(S) = 20$ y $N(A) = 12$ y la probabilidad del evento A se calcula por:

$P(A) = N(A) / N(S) = 12/20 = 0.60$

$P(A) = 0.60$ **R//**

b) En este caso se seleccionarán dos proyectos, con un muestreo sin reemplazamiento ordenado. Sea G_i el evento que el proyecto i sea grande (i=1,2) y P_i que sea pequeño. En este problema hay 4 posibles resultados (se recomienda construir el árbol de resultados), Estos son:

G_1G_2 que ambos sean proyectos grandes.

G_1P_2 el primero grande y el segundo pequeño.

P_1G_2 el primero pequeño y el segundo grande.

P_1P_2 los dos pequeños.

Para este inciso, N(S) se calcula aplicando la fórmula de conteo correspondiente para este tipo de muestreo, esto es:

$N(S) = 20x19 = 380$

Se define el evento B: que ambos proyectos sean grandes.

$B = G_1G_2$

Como hay 12 proyecto grande la cantidad de puntos muestrales que cumplen con esta condición, aplicando la fórmula correspondiente de conteo es:

$N(B) = N(G_1G_2) = 12x11 = 132$

Y la probabilidad de B se calcula por:

$P(B) = N(B) / N(S) = 132/380 = 0.3474$

$P(B) = 0.3474$ **R//**

c) Se define el evento C: que un proyecto sea grande y el otro pequeño.

Note que el segundo y tercer punto de S descrito arriba, cumplen con esta condición. Sea $C_1 = G_1P_2$ y $C_2 = P_1G_2$, entonces

$N(C_1) = N(G_1P_2) = 12x8 = 96$

$N(C_2) = N(P_1G_2) = 8x12 = 96$

Por tanto:

$P(C_1) = 96/380 = 0.2526$

$P(C_2) = 96/380 = 0.2526$

Y como $C = C_1 + C_1$

Entonces aplicando la propiedad de la suma de eventos para el cálculo de probabilidades, se tiene que:

$P(C) = P(C_1) + P(C_2) = 0.5052$

$P(C) = 0.5052$ **R//**

d) Se define el evento D: que al menos uno de los proyectos sea grande.

El evento D puede representarse en función de los eventos anteriormente definidos, esto es:

$D= B + C$

Aplicando la propiedad de la probabilidad de una suma de eventos, se tiene que:

$P(D) = P(B) +P(C) = 0.3474 + 0.5052 =$

También este inciso puede resolverse utilizando la propiedad de complemento de un evento. Note que en el Espacio Muestral, el único punto que no cumple con la condición solicitada es el punto $P_1P_{2.}$ Si se define $P = P_1P_{2.}$, entonces:

$D = P^C$ y aplicando la propiedad del complemento para el cálculo de probabilidades:

$P(D) = 1 - P$

$P(P) = N(P) / N(S)$

$N(P) = N(P_1P_{2.}) = 8x7 = 56$

$P(P) = 56/380 = 0.1474$

Entonces:

$P(D) = 1 - 0.1474 = 0.8526$

$P(D) = 0.8526$

Que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Para el inciso e y f el tipo de muestreo utilizado para seleccionar los 4 proyecto es sin reemplazamiento y sin orden y por tanto para el cálculo de las probabilidades se utilizará la fórmula de conteo de la combinatoria. Entonces:

$$N(S) = {}_{20}C_4 = \frac{20!}{16!\,4!} = \frac{20x19x18x17}{4x3x2x1} = \frac{9\,690}{2} = 4\,845$$

e) Se define el evento E: que los 4 proyecto sean grandes

$$N(E) = {}_{12}C_4 = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{12x11x10x9}{4x3x2x1} = 495$$

P(E) = 495/4 845 = 0.1022

P(E) = 0.1022 **R//**

f) Se define el evento F: que ambos sean proyecto pequeños.

$$N(F) = {}_{8}C_4 = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8x7x6x5}{4x3x2x1} = \frac{140}{2} = 70$$

P(F) = 70/4 845 = 0.0144

P(F) = 0.0144 **R//**

2.1.9. Probabilidad subjetiva

En muchas situaciones, ni se conocen los resultados que pueden ocurrir en un experimento aleatorio, ni existe suficiente información disponible para aplicar la definición frecuencial o empírica de probabilidad. Esto se debe a que en la actualidad los cambios en cualquier actividad ocurren con mucha mayor rapidez que en períodos históricos pasados. Baste solo pensar en las tecnologías de la información y en los teléfonos celulares cuyos cambios se realizan casi continuamente.

Ante esta situación y en situación de incertidumbre o riesgo se ha desarrollado el concepto de probabilidad subjetiva (Levine, Szabath & Stephan, 2016), que es aquella que se basa en el criterio de una persona o grupo de personas basados en los conocimientos y experiencia personal sobre el hecho objeto de estudio. Esto se ha ido perfeccionando y hoy constituye una herramienta de mucho uso en el campo empresarial y de estudios del medio ambiente y es la conformación de los denominados grupos de expertos para la estimación de probabilidades.

El valor de probabilidad utilizando estos procedimientos se le denomina probabilidad subjetiva, pues puede variar notablemente su valor de una persona a otra, aunque hay procedimientos para poderla perfilar y lograr bastante exactitud en su estimación.

En este texto no se hará uso de esta definición, pues el uso de expertos para la toma de decisiones es un tema que se escapa del propósito de este libro.

2.2. Probabilidad condicional

En muchos problemas de la vida práctica la probabilidad de ocurrencia de un evento, está condicionada a que haya ocurrido otro evento anteriormente. Algunos ejemplos se relacionan a continuación:

- En la formación de un equipo de 2 personas seleccionadas entre 10 de ambos sexos, la probabilidad que la segunda seleccionada sea mujer dado que la primera fue mujer.
- La probabilidad de que llueva hoy dado que llovió ayer.
- La probabilidad de que un cliente que llega a un hotel encuentre reservación dado que el anterior la encontró.
- En el caso de que un mueble metálico tenga varios defectos para considerarlo defectuosos (abolladura, pintura, montaje, etc.), la probabilidad de que un mueble metálico tenga abolladuras dado que es defectuoso

Se dará a continuación la definición de probabilidad condicional (Hernández, et al., 2007)

DEFINICIÓN

Sean A y B dos eventos definidos en el mismo espacio muestral S, la probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió B se denomina probabilidad condicional de A dado B y se representa como:

$P(A / B) = N(A.B)/ N(B)= P(A.B) / P(B)$ para $N(B)$ ó $P(B)$ mayor que cero

Donde:

$N(A.B)$ es el número de puntos muestrales que cumplen con la intersección de los eventos A y B.

$P(A.B) = N(A.B) / N(S)$ es la probabilidad de la intersección del evento A y el B.

$P(B) = N(B)/ N(S)$

Por ejemplo, en el caso de los muebles metálicos mencionado anteriormente, la empresa puede producir 10 000 muebles mensuales, 200 de ellos con defectos según se muestra en la siguiente tabla:

DEFECTO DETECTADO	ABOLLADURA	PINTURA	CIERRE
FRECUENCIA OBSERVADA	54	102	44

En este problema por lo estudiado anteriormente, la probabilidad de que un mueble sea defectuoso, P(D), aplicando la definición frecuencial es de 0.02 (200/10 000). La probabilidad global de que un mueble producido tenga abolladura, P(A) será de 0.0054 (54/10 000), pero si se desea calcular la probabilidad de que tenga abolladura dado que es defectuoso, entonces esta probabilidad se denotaría por:

P(A/D) = N(A.D) / N(D) por la definición de probabilidad condicional.

Note que N(D) reduce el espacio muestral a los puntos de muebles que sean defectuosos, entonces:

N(D) = 200

Y el numerador viene dado por los puntos que cumplen ambas condiciones que tenga abolladura y sea defectuoso y entonces:

N(A.D) = 54

Y por tanto la probabilidad de que tenga abolladura dado que es defectuoso es de:

P(A/D) = N(A.D) / N(D) = 54 / 200 = 0.27

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL.

1. la probabilidad condicional tiene un valor que está en el intervalo ´de cero a uno, esto es:

$$0 \leq P(A / B) \leq 1$$

2. La probabilidad de la suma o adición de dos eventos mutuamente excluyentes A y B dado C viene dado por:

$$P(A + B / C) = P(A / C) + P(B / C) \text{ si } A.B = \{\emptyset\}$$

3. La probabilidad del complemento de A dado B se puede calcular por:

$P(A^C / B) = 1 - P(A / B)$

2.2.1. Problemas resueltos de probabilidad condicional

PR 2.18. Una consultora medio ambiental tiene la siguiente composición de hombres y mujeres y de técnicos y profesionales:

COMPOSICIÓN	TÉCNICOS	PROFESIONALES
HOMBRES	12	6
MUJERES	16	6

Si se selecciona aleatoriamente una persona de este grupo, calcule:

a) Probabilidad que sea hombre.

b) Probabilidad que sea un profesional.

c) Probabilidad que sea mujer y profesional.

d) Dado que es un hombre que sea profesional.

e) Dado que es un técnico que sea mujer.

SOLUCIÓN:

a) En total hay 40 personas en la empresa, N(S)=40.

Se define el evento H: Que sea hombre, entonces N(H)= 18 y aplicando la definición clásica de probabilidad:

P(H)= N(H) / N(S) = 18/40= 0,45

P(H) = 0.45 **R//**

b) Se define el evento F: Que sea profesional. Entonces N(F)=12 y P(F)=N(F)/N(S)=12/40=0,30

P(F)= 0,30 **R//**

c) Se define el evento C: Que sea mujer y profesional, C=M.F (que sea mujer y profesional). El número de puntos en el espacio muestral que cumple con ambas condiciones es N(C)=6 y entonces:

P(C)= P(M.F) = N(C)/N(S)=6/40=0,15

$P(C) = 0.15$ **R//**

d) Esto es una probabilidad condicional y la condición que se fija es que es hombre. Aplicando la definición de probabilidad condicional, se tiene:

$P(F/H)=N(F.H)/N(H)=P(F.H)/P(H)$

$P(F.H)= N(F.H)/N(S) = 6/40= 0,15$

La probabilidad de que sea hombre fue calculada en el inciso a: $P(H) = 0.45$

$P(F/H)= P(F.H)/P(H) = 0,15/0,45 = 0.3333$

$P(F/H) = 0.3333$ **R//**

e) Esto es otra probabilidad condicional, pero en este caso la condición es que sea técnico. Entonces:

$P(M/T) =P(M.T)/P(T)$

$P(M.T) =N(M.T)/N(S)=16/40=0.40$

$P(T)=N(T)/N(S)=28/40=0.70$

$P(M/T)=P(M.T)/P(T)=0.40/0.70=0.57$

$P(M/T) = 0.57$ **R//**

PR 2.19. En un recipiente que contiene 20 baterías de celular de cierta marca hay 4 que están defectuosas. Si se extraen 2 baterías de este recipiente aleatoriamente, una a una, determine la probabilidad que:

a) Que la primera y la segunda sean buenas.

b) La segunda sea buena dado que la primera lo fue.

c) que la segunda sea defectuosa dado que la primera fue buena

Solución

a) Se pide calcular la probabilidad de la intersección que ambas baterías sean buenas, o sea la $P(B_!.B_2)$. Aplicando las técnicas de conteo para este caso, habrá 16 posibilidades para que la primera sea buena y para la segunda extracción que darían 15 buenas de las 19 que quedan y por tanto:

$N(B_!.B_2) = 16x15 = 240$

$N(S) = 20x19 = 380$

$Y\ P(B_!.B_2) = N(B_!.B_2)/N(S) = 240/380 = 0.6315$

$P(B_!.B_2) = 0.6315$ **R//**

b) Se define el evento C: la segunda batería sea buena dado que la primera lo fue. La probabilidad de este evento puede denotarse como:

$P(B_2/B_1) = P(B_!.B_2)/\ P(B_1)$

El valor del numerador en el término de la derecha de la igualdad anterior fue calculado en el inciso anterior y es 0.6315

$P(B_1) = N(B_1)/\ N(S) = 16/20 = 0.80$

Y sustituyendo en la expresión de la probabilidad condicional se tiene que:

$P\ (B_2/B_1) = P(B_!.B_2)/\ P(B_1) = 0.6315/0.80 = 0.7894$

$P\ (B_2/B_1) = 0.7894$ **R//**

c) Se define el evento D: que la segunda sea defectuosa dado que la primera fue buena.

La probabilidad de este evento puede denotarse por:

$P(D) = P\ (D_2/B_1) = P(B_!.D_2)/\ P(B_1)$

La $P(B_!.D_2)$, puede calcularse como:

$P(B_!.D_2) = N(B_!.D_2)/\ N(S)$

Donde $N(B_!.D_2) = 16x4 = 64$, por tanto:

$P(B_!.D_2) = N(B_!.D_2)/\ N(S) = 64/380 = 0.1684$

Sustituyendo en la fórmula de la probabilidad condicional que se desea calcular se tiene:

$P(D) = P\ (D_2/B_1) = P(B_!.D_2)/\ P(B_1) = 0.1684/0.80 = 0.2105$

$P(D) = P\ (D_2/B_1) = 0.2105$ **R//**

PR 2.20. A una tienda que oferta productos para la agricultura arriban los clientes para adquirir fertilizante o pesticida. Se ha estudiado que el 70% de los clientes compran fertilizante, el 50% compran pesticida y un 30 %

compran ambos. Calcule la probabilidad que:

a) Que compre fertilizante y pesticida.

b) Que compre pesticida dado que compro fertilizante.

c) Que compre fertilizante dado que compro pesticida.

Solución

Se definen los eventos:

P: que compre fertilizante.

D: que compre pesticida.

a) Se pide la probabilidad de que compre fertilizante y pesticida, esto es: P (P.D). Esta viene dada directamente en los datos en forma de porciento y entonces:

P (P.D) = 0.30

b) Hay que calcular P (D/P) y esta viene dado según la definición de probabilidad condicional por:

P (D/P) = P (P.D) / P (P)

Por datos se conoce que:

P (P) = 0.70 y la P (D) = 0.50

Entonces:

P (D/P) = P (P.D) / P (P) = 0.30/0.70 = 0.4286

P (D/P) = 0.4286 **R//**

c) Hay que calcular P (P/D) = P (P.D) / P (D). Sustituyendo se tiene:

P (P/D) = P (P.D) / P (D) = 0.30/0.50 = 0.60

P (P/D) = 0.60 **R//**

2.3. Eventos independientes

El concepto de eventos independientes tiene una interpretación más práctica que matemática, es decir, al analizar la realización de un experimento aleatorio el investigador puede asumir independencia o no de acuerdo a las características de dicho experimento y entonces puede aplicar las propiedades de los eventos independientes.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, los resultados de cada lanzamiento son independiente del anterior, pues en cada lanzamiento hay igual posibilidad que aparezca en la cara superior un número del 1 al 6.

No es igual en el caso de realizar un muestreo aleatorio sin reemplazamiento ordenado, como es el caso de la selección de personas para conformar un equipo de un colectivo donde hay hombres y mujeres, ya que la probabilidad de cada extracción depende del resultado anterior y en este caso los eventos no son independientes.

Puede asumirse independencia en la producción de artículos defectuosos cada día en una línea de producción, si el investigador puede afirmar que la producción de artículos defectuosos de un día para nada depende de lo que pasó el día anterior.

Cuando se asume independencia entre eventos, el cálculo de probabilidades se simplifica notablemente. Note que, despejando de la definición de probabilidad condicional se puede obtener la probabilidad de la intersección de dos eventos, esto es:

$$P(A/B) = P(A.B) / P(B)$$

Despejando:

$$P(A.B) = P(A/B) . P(B)$$

Y si A y B son eventos independientes, entonces la probabilidad de la intersección es (Walpole, et al., 2012):

$$P(A.B) = P(A) . P(B)$$

Estos conceptos se aplican en la Regla de la Suma y de la Multiplicación que se verán a continuación y que son sumamente útiles para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos.

2.4. Regla de la suma de probabilidades

Si A y B son dos eventos cualesquiera definidos en el mismo Espacio Muestral S, entonces, la probabilidad que ocurra al menos uno de ellos (que ocurra A o B o ambos), se calcula por:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

Si A y B son mutuamente excluyente:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$

La generalización de esta regla será: Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$, son eventos mutuamente excluyentes definidos en un mismo Espacio Muestral entonces:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$$

2.5. Regla de la multiplicación de probabilidades

Si A y B son dos eventos en S , la probabilidad de ocurrencia de ambos simultáneamente (que ocurra A y B) viene dado por:

$$P(A.B) = P(A / B)\,P(B) = P(B / A)\,P(A)$$

Si A y B son eventos independientes:

$$P(A.B) = P(A).P(B)$$

Generalización: Si A_1, A2,…,A_k ,son eventos independientes definidos en el mismo espacio muestral, entonces:

$$P(A_1 . A_2 . \ldots A_k) = P(A_1).P(A_2) \ldots .P(A_k)$$

A continuación, se presentan un grupo de ejercicios resueltos aplicando ambas reglas.

2.6. Problemas resueltos aplicando la regla de la suma y de la multiplicación

PR 2.21. Un hotel tiene tres baterías (1, 2, 3) para el tratamiento de las aguas residuales. La probabilidad de que funcionen en un día es de 0.9 para la batería 1, 0.85 para la 2 y 0.80 para la 3. Si se puede asumir independencia entre la operación de esas baterías, calcule la probabilidad de que:

a) Los tres funcionen correctamente en un día.

b) Que solamente esté funcionando la batería 2.

c) Que dos de ellas estén funcionando.

d) Que al menos dos de las baterías estén funcionando.

e) Que al menos una de las baterías esté funcionando.

SOLUCIÓN.

En este caso el Espacio Muestral está integrado por 8 posibles resultados. Si representamos el evento funcionar por la letra F_i y no funcionar por la N_i, donde i= 1,2 y 3 según sea la batería, los posibles resultados de este experimento se muestra en el árbol de resultados de la Figura 7.

De los datos del problema se puede obtener que las probabilidades de funcionamiento de las 3 baterías son:

$P(F_1) = 0.90$; $P(F_2) = 0.85$ y $P(F_2) = 0.80$

Y las probabilidades de no funcionar vendrían dado por su complemento, esto es:

$P(N_1) = 1 - P(F_1) = 1- 0.90 = 0.10$

Y de similar manera: $P(N_2) = 0.15$ y $P(N_3) = 0.20$

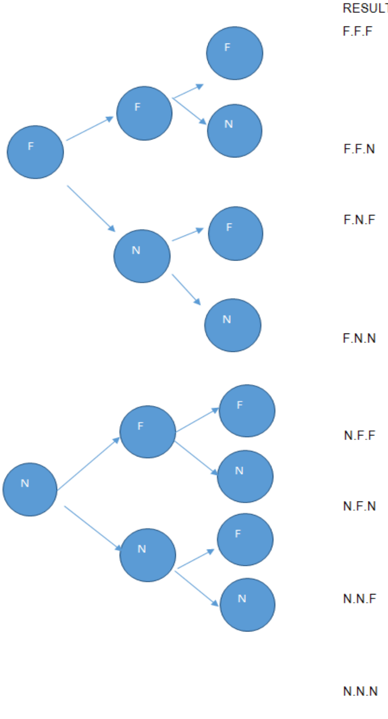


Figura 7 Árbol de resultados ejercicio resuelto 2.12.

a) Se define el evento A: que las 3 baterías funcionen correctamente. Entonces:

$P(A) = P(F_1.F_2.F_3)$ y como las baterías funcionan independientemente, aplicando la Regla de la Multiplicación:

$P(A) = P(F_1.F_2.F_3) = P(F_1).P(F_2).P(F_3) = 0.90x0.85x0.80 = 0.612$

$P(A) = 0.612$ **R//**

b) Se define el evento B: que solamente esté funcionando la batería 2.

Entonces del Árbol de resultados se identifica que:

$P(B) = P(N_1.F_2.N_3) = P(N_1).P(F_2).P(F_3) = 0.10x0.85x0.20 = 0.0170$

$P(B) = 0.0170$ **R//**

c) Se define el evento C: que dos de las baterías estén funcionando.

Del Árbol de resultados puede verse que hay 3 puntos muestrales que cumplen con esta condición y ellos son mutuamente excluyentes, entonces para la solución de este inciso hay que aplicar la Regla de la Suma primero y a cada sumando se le aplica la Regla de la Multiplicación, o sea:

$P(C)= P(F_1.F_2.N_3) + P(F_1.N_2.F_3) + P(N_1.F_2.F_3)$

Y aplicando la Ley de la Multiplicación a cada sumando quedará:

$P(C)= P(F_1).P(F_2).P(N_3) + P(F_1).P(N_2).P(F_3) + P(N_1).P(F_2).P(F_3)$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$P(C)=0.90x0.85x0.20 + 0.90x0.15x0.80 + 0.10x0.85x0.80= 0.153 + 0.108 +0.068$

$P(C)=0.329$ **R//**

d) Se define el evento D: que al menos dos de las baterías estén funcionando. Esto implica que funcionen dos o las tres baterías. Como en el inciso anterior se calculó la probabilidad de que funcionen exactamente dos baterías, y en el inciso a de que funcionaran las tres, entonces la probabilidad del evento D puede calcularse aplicando la Ley de la Suma, entonces:

$P(D) = P(A) + P(C)$

$P(D)=0.612 + 0.329 = 0.941$

$P(D) = 0,941$ **R//**

e) Se define el evento E: que al menos una batería funcione.

En este caso es mejor calcular la probabilidad de este evento utilizando la propiedad del complemento, que es el caso en que ninguna batería funcionara, o sea:

$P(E)= 1 – P(N_1.N_2.N_3) = 1 –P(N_1).P(N_2).P(N_3) = 1 – 0.10x0.15x0.20= 0.997$

$P(E) = 0.997$ **R//**

PR 2.22. Un grupo de 16 personas están optando por una plaza en una empresa de proyectos. De ellos 10 son hombres y el resto mujeres. De los hombres 6 son casados y de las mujeres la mitad son casadas. Si se seleccionan para la entrevista aleatoriamente a dos de estas personas, calcule la probabilidad que:

a) Que el primero seleccionado sea hombre y casado.

b) Que el primero seleccionado sea casado dado que es hombre.

c) Que ambos seleccionados sean casados.

d) Que ambos sean del mismo sexo.

Solución

Se definen los siguientes eventos:

H_i: Que la persona i seleccionada sea hombre.

M_i: Que la persona i seleccionada sea mujer

C_i: Que la persona i seleccionada sea casada.

Para todos los casos como se seleccionan dos personas i= 1,2

a) Se define el evento A: que el primero seleccionado sea hombre y casado.

$P(A) = P(H_1.C_1)$

Note que del total de personas que sean hombres y casados hay 6 por tanto esta probabilidad puede calcularse directamente a partir de los datos y es:

$P(A) = 6/16 = 0.375$

$P(A) = 0.375$ **R//**

b) Definir el evento B: que el primero seleccionado sea casado dado que es hombre. Se pide calcular una probabilidad condicional que se denota por:

$P(B) = P(C_1/H_1)$

Aplicando la definición de probabilidad condicional:

$P(C_1/H_1) = P(C_1.H_1) / P(H_1)$

Como hay 10 hombres en el total de personas para la primera selección, entonces:

$P(H_1) = 10/16 = 0.625$

Por tanto:

$P(B) = P(C_1/H_1) = P(C_1.H_1) / P(H_1) = \dfrac{6}{16} \Big/ \dfrac{10}{16} = 6/10 = 0.60$

$P(B) = 0.60$ **R//**

c) Definir el evento C: que ambos seleccionados sean casados.

$P(C) = P(C_1.C_2)$

Aplicando la regla de la multiplicación:

$P(C_1.C_2) = P(C_2/C_1).P(C_1)$, donde:

$P(C_1) = 9/16 = 0.5625$, ya que en total hay 9 personas casadas, 6 hombres y tres mujeres.

Probabilidad que el segundo sea casado dado que el primero lo fue, implica que de 9 casados que hay al inicio, solo quedarán 8 para la segunda selección, por tanto:

$P(C_2/C_1) = 8/ 15 = 0.5333$

Entonces:

$P(C) = P(C_1.C_2) = P(C_2/C_1).P(C_1) = (8/15)x\ (9/16) =0.5333x0.5625 = 0.3000$

$P(C) = 0.3000$ **R//**

Note la semejanza de este resultado al aplicar las reglas de conteo a este problema.

d) Se define el evento D: que ambos sean del mismo sexo. Este evento estará compuesto por dos eventos mutuamente excluyente, que los dos sean hombres o que los dos sean mujeres, entonces se puede aplicar la Regla de la Suma

$P(D) = P(H_1.H_2) + P(M_1.M_2)$

Aplicando entonces la Regla de la Multiplicación a cada uno de los términos de la derecha:

$P(H_1.H_2) = P(H_2/H_1).\ P(H_1)$

$P(M_1.M_2) = P(M_2/M_1).\ P(M_1)$

Donde:

$P(H_1) = 10/16 = 0.625$

$P(M_1) = 6/16 = 0.375$

$P(H_2/H_1) = 9/15 = 0.600$

$P(M_2/M_1) = 5/15 = 0.333$

Sustituyendo:

$P(D) = P(H_1.H_2) + P(M_1.M_2) = P(H_2/H_1).\ P(H_1) + P(M_2/M_1).\ P(M_1) = 0.625 \times 0.600 + 0.375 \times 0.333 = 0.375 + 0.125 = 0.50$

$P(D) = 0.50$ **R//**

PR 2.23. La probabilidad de que un proyecto de desarrollo local culmine en el tiempo programado es de 0.80. Si se seleccionan dos proyectos y se puede asumir independencia entre ellos, calcule la probabilidad que:

a) Ambos culminen en tiempo.

b) Que al menos uno culmine en tiempo.

c) Que se seleccionen tres proyectos y ninguno culmine en tiempo.

d) Que solamente de los 3 proyectos culmine en tiempo el primero seleccionado.

Solución

Para el caso de los dos proyectos hay 4 posibilidades en este problema:

E1: C1.C2 Que ambos culminen en tiempo

E2: C1.N2 El primero culmine en tiempo y el segundo no.

E3: N1.C2 El primero no culmine en tiempo y el segundo sí.

E4: N1.N2 Ninguno culmine en tiempo.

Todos estos eventos son mutuamente excluyentes.

a) Se define el evento A: que ambos culminen en tiempo.

Aplicando la Regla de la Multiplicación y asumiendo independencia entre la ejecución de ambos proyectos:

$P(A) = P(C1.C2) = P(C1).\ P(C2)$

Como $P(C1) = P(C2) = 0.80$, entonces:

$P(A) = 0.80x0.80 = 0.64$

$P(A) = 0.64$ **R//**

b) Definir el evento B: que al menos uno culmine en tiempo.

Aplicando la Regla de la Suma:

$P(B) = P(C1.N2) + P(N1.C2) + P(C1.C2)$

Aplicando la Regla de la Multiplicación a cada término de la derecha:

$P(B) = P(C1).P(N2) + P(N1).P(C2) + P(C1).P(C2)$

$P(B) = 0.80x0.20 + 0.20x0.80 + 0.80x0.80 = 0.16 + 0.16 + 0.64 = 0.96$

$P(B) = 0.96$ **R//**

Otra forma de resolver este problema es el siguiente. Note que el único resultado que no cumple con esta condición es el evento E4, que ninguno compre, por tanto:

$B = \{E4\}^c = \{N1.N2\}$

P(B) = 1 – P(E4)

La probabilidad de E4 puede calcularse aplicando la Regla de la Multiplicación a eventos independientes. Como P(N1) = P(N2) = 0.20, entonces:

P(E4) = P(N1.N2) = P(N1).P(N2) = 0.20x0.20 = 0.04

Y por tanto la probabilidad de que al menos uno compre es:

P(B) = 1 – P(E4) = 1 – 0.04 = 0.96

P(B) = 0.96 **R//**

c) Se define el evento F: que ninguno de los 3 proyectos culmine en tiempo. Con la notación utilizada anteriormente para el caso de 3 clientes:

F = {N1.N2.N3}

Aplicando la Regla de la Multiplicación para eventos independientes:

P(F) = P(N1.N2.N3) = P(N1).P(N2).P(N3) = 0.20x0.20x0.20 = 0.0080

P(N) = 0.0080 **R//**

d) Se define el evento D: que de los 3 proyectos, solamente el primero culmine en tiempo.

Acorde con la notación utilizada este punto muestral puede denotarse por:

D = {C1.N2.N3}

Y aplicando la Regla de la Multiplicación para eventos independientes:

P(D) = P(C1.N2.N3) = P(C1).P(N2).P(N3) = 0.80x0.2x0.2 = 0.032

P(D) = 0.032 **R//**

PR 2.24. Para realizar un Proyecto de una pequeña hidroeléctrica se requieren de dos premisas: tener el financiamiento y la licencia ambiental. La probabilidad de obtener la licencia ambiental es de 0.92 y de lograr el presupuesto necesario es de 0.95. Si se puede asumir independencia entre ambas premisas, calcule la probabilidad que:

a) Se logren ambas premisas.

b) Que al menos se logre una de las premisas.

c) Que se otorgue la licencia ambiental y no se logre el presupuesto necesario.

SOLUCIÓN

Se definen los siguientes eventos:

LA: Obtener la Licencia Ambiental.

P: Obtener el presupuesto.

NLA: No obtener la Licencia Ambiental.

NP: No obtener el presupuesto.

Se sabe que:

$P(LA) = 0.92$

$P(P) = 0.95$

Por tanto:

$P(NLA) = 1 - P(LA) = 1 - 0.92 = 0.08$

$P(NP) = 1 - P(P) = 1 - 0.95 = 0.05$

a) Se define el evento A: que se logren ambas premisas. En este caso se debe tener la Licencia Ambiental y el presupuesto

$A = LA.\ P$

Aplicando la Regla de la Probabilidad para eventos independientes:

$P(A) = P(LA.P) = P(LA).\ P(P) = 0.92x0.95 = 0.8740$

$P(A) = 0.8740$ **R//**

b) Se define el evento B: que al menos se logre una de las premisas

Entonces esto implica que se obtenga la Licencia Ambiental, el Presupuesto o ambas y se debe aplicar la Regla de la Suma.

$B = LA + P$

$P(B) = P(LA) + P(P) - P(LA.P)$

El último término fue calculado en el inciso a. Sustituyendo los valores numéricos:

$P(B) = 0.92 + 0.95 – 0.8740 = 0.9960$

$P(B) = 0.9960$ **R//**

c) Definir el evento C: que se otorgue la licencia ambiental y no se logre el presupuesto necesario. Este evento puede ser denotado por:

$P(C) = P(LA.\ NP)$

Una vez más aplicando la Regla de la Multiplicación de Probabilidades:

$P(C) = P(LA).P(NP) = 0.92x\ 0.05 = 0.0460$

$P(C) = 0.460$ **R//**

PR 2.25. Una empresa organiza Cursos de Capacitación para el personal de nuevo ingreso. Se conoce que un trabajador que aprueba dicho curso tiene una probabilidad de 0.90 de conocer los principales objetivos y la cultura organizacional de la empresa dado que aprobó el curso. Si un 85% aprueba dichos cursos, calcule la probabilidad de que un trabajador de nuevo ingreso:

a) Apruebe el curso y conozca los objetivos y cultura organizacional de la empresa.

b) Apruebe el curso y no conozca los objetivos y cultura organizacional de la empresa.

Solución

Se definen los siguientes eventos:

AP: aprobar el curso de capacitación.

NAP: no aprobar el Curso de capacitación.

COC: Conocer los objetivos y la cultura organizacional de la empresa.

NCO: No conocer los objetivos y la cultura organizacional de la empresa.

a) Se define el evento A: que apruebe el curso y conozca los objetivos y cultura organizacional de la empresa. Según las definiciones dadas anteriormente, este evento puede representarse como:

A = AP. COC

Y aplicando la Regla de la Multiplicación de Probabilidades:

P(A) = P(AP. COC) = P(COC/AP).P(AP)

De los datos del problemase tiene:

P(COC/AP) = 0.90 P(AP) = 0.85

Sustituyendo:

P(A) = P(AP. COC) = P(COC/AP).P(AP) = 0.90x0.85 = 0.7650

P(A) = 0.7650 **R//**

b) Se define el evento B: que apruebe el curso y no conozca los objetivos y cultura organizacional de la empresa.

El evento B pude representarse por la siguiente intersección de eventos:

B = AP. NCO

Aplicando la Regla de la Multiplicación:

P(B) = P(AP. NCO) = P(NCO/AP).P(AP)

Donde, aplicando el complemento de la probabilidad condicional se tiene que:

P(NCO/AP) = 1 - P(COC/AP) = 1 – 0.90 = 0.10

Entonces:

P(B) = P(AP. NCO) = P(NCO/AP).P(AP) = 0.10x0.85 = 0.0850

P(B) = 0.0850 **R//**

PR 2.26. Una empresa textil ha realizado un estudio, por observación, sobre el uso de los medios de protección de sus trabajadores y ha determinado que la probabilidad de que un trabajador lo use dado que es hombre es de 0.80, mientras que esa misma probabilidad aumenta a 0.95 dado que es mujer. Si la plantilla de producción de la empresa tiene un 70 % de mujeres, determine la probabilidad que:

a) Un trabajador sea hombre y use los medios de protección.

b) Un trabajador sea mujer y use los medios de protección.

c) Un trabajador sea mujer y no use los medios de protección.

Solución

Se definen los eventos:

PR: usa medios de protección.

NPR: no usa medios de protección.

H: el trabajador es hombre.

M: el trabajador es mujer.

a) Se define el evento A: que el trabajador sea hombre y use medios de protección. A puede denotarse por la intersección de PR y H, esto es:

A = PR.H

Aplicando la Regla de la Multiplicación:

P(A) = P(PR.H) = P(PR/H).P(H)

Por los datos se sabe que:

P(PR/H) = 0.80

P(H) = 0.30 pues hay un 70% de mujeres y por tanto un 30% de hombres en la plantilla de producción.

Sustituyendo:

P(A) = P(PR/H).P(H) = 0.80x0.30 = 0.24

P(A) = 0.24 **R//**

b) Se define el evento B: que sea mujer y use medios de protección. Similar al inciso anterior puede plantearse la probabilidad de este evento como:

P(B) = P(PR.M) = P(PR/M).P(M)

Sustituyendo por los datos del problema:

P(PR/M) = 0.90

$P(M) = 0.70$

$P(B) = P(PR/M).P(M) = 0.90x0.70 = 0.63$

$P(B) = 0.63$ **R//**

c) Se define el evento C: que un trabajador sea mujer y no use los medios de protección. Según los eventos definidos al inicio, este evento se puede representar de la siguiente manera:

$C = NPR.M$

Entonces:

$P(C) = P(NPR.M) = P(NPR/M).P(M)$

Basado en la propiedad de la probabilidad condicional que plantea:

$P(A^C/B) = 1 – P(A/B)$

Se puede plantear que:

$P(NPR/M) = 1 – P(PR/M)$, entonces:

$P(NPR/M) = 1 – P(PR/M) = 1 – 0.90 = 0.10$

$P(C) = P(NPR/M).P(M) = 0.10x0.90 = 0.0900$

$P(C) = 0.0900$ **R//**

PR 2.27. Un equipo de futbol le quedan 3 partidos por celebrar contra los equipos A, B y C. En esta etapa no hay empates. Por datos históricos se conoce que la probabilidad que el equipo le gane al equipo A es de 0.85, al equipo B la probabilidad es de 0.50 y al equipo C de 0.70. Se puede asumir independencia entre los resultados de los distintos juegos. Se quiere calcular la probabilidad que:

a) Gane los tres juegos que quedan.

b) Gane los dos primeros y obtenga cualquier resultado en el último.

c) Gane al menos dos de los tres que quedan.

d) Gane al menos un juego de los restantes.

Solución

Este tipo de problemas se ha resuelto anteriormente, pero en este caso se aplicará las reglas estudiadas de probabilidad.

Como quedan 3 juegos y cada uno puede tener dos resultados, ganar o perder, se tienen un espacio muestral de 8 posibles resultados, los que se pueden describir utilizando un árbol de resultados o por simple descripción. En la solución del problema solo se describirán los puntos muestrales de interés.

Se definen los eventos GA, GB, GC, como ganar a los equipos A, B y C y PA, PB, PC como perder dichos encuentros. Las probabilidades asociadas a estos eventos son:

$P(GA) = 0.85$ $P(GB) = 0.50$ $P(GC) = 0.70$

Por el complemento:

$P(PA) = 0.15$ $P(PB) = 0.50$ $P(PC) = 0.30$

a) Se define el evento A: que el equipo gane todos los partidos restantes.

A vendrá dado por la intersección de los eventos GA, GB y GC, esto es:

$A = (GA.GB.GC)$

Y aplicando la Regla de la Multiplicación para eventos independientes:

$P(A) = P(GA).P(GB).P(GC)$

Sustituyendo los datos dados de estas probabilidades se tiene:

$P(A) = P(GA).P(GB).P(GC) = 0.85x0.50x0.70 = 0.2975$

$P(A) = 0.2975$ **R//**

b) Se define el evento B: Gane los dos primeros y obtenga cualquier resultado en el último.

Este evento está integrado por los siguientes puntos muestrales:

GA.GB.GC

GA.GB.PC

Los que son mutuamente excluyentes, entonces aplicando la Regla de la Suma

P(B) = P(GA.GB.GC) + P(GA.GB.PC) = P(A) + P(GA.GB.PC)

Aplicando la Regla de la Multiplicación a cada término de la derecha de la igualdad anterior se tiene:

P(B) = P(GA.GB.GC) + P(GA.GB.PC) = P(A) + P(GA).P(GB).P(PC)

Sustituyendo los valores numéricos y considerando que el primer término ya fue calculado en el inciso anterior, se tiene:

P(B) = P(A) + P(GA).P(GB).P(PC) = 0.2975 + 0.85x0.50x0.30 = 0.2875 + 0.1275 = 0.4250

P(B) = 0.4250 **R//**

c) Se define el evento C: ganar al menos dos juegos de los que quedan por jugar.

En este caso C está integrado por la suma de 4 puntos muestrales: ganar exactamente dos juegos o ganar los tres que quedan. Entonces:

C = GA.GB.GC + GA.GB.PC + GA.PB.GC + PA.GB.GC

Cada término es una intersección de tres eventos independientes y entonces aplicando la Regla de la Multiplicación y de la Suma se tiene:

P(C) = P(GA).P(GB).P(GC) + P(GA).P(GB).P(PC) + + P(GA).P(PB).P(GC) + P(PA).P(GB).P(GC)

Los dos primeros términos de la derecha es el evento B calculados anteriormente, entonces:

P(C) = P(B) + P(GA).P(PB).P(GC) + P(PA).P(GB).P(GC) = 0.4250 + 0.85x0.50x0.70 + 0.15x0.50x0.70 = 0.4250 + 0.2975 + 0.0525 = 0.7750

P(C) = 0.7750 **R//**

d) Definir el evento D: que gane al menos un juego de los que quedan por jugar

Note que hay 7 puntos muestrales de los 8 posibles que cumplen con esta condición y por tanto, solo hay un punto muestral que no cumple con esa condición, que es el caso en que pierda todos los juegos restantes. Entonces para este caso es más sencillo el cálculo de la probabilidad aplicando el complemento, o sea:

P(D) = 1 - P(PA.PB.PC) = 1 - P(PA).P(PB).P(PC) = 1 – 0.15x0.50x0.30 = 1 – 0.0225

P(D) = 0.9775 **R//**

2.7. Regla de la probabilidad total

La Regla de la probabilidad total, se va a aplicar cuando se quiera determinar la probabilidad de un evento que está definido en un Espacio muestral integrado por k eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos y se conoce las probabilidades condicionales de dicho evento dado los eventos mutuamente excluyentes y la probabilidad de estos últimos. Esto puede visualizarse en el Diagrama de Venn de figura 8, para el caso de 3 eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

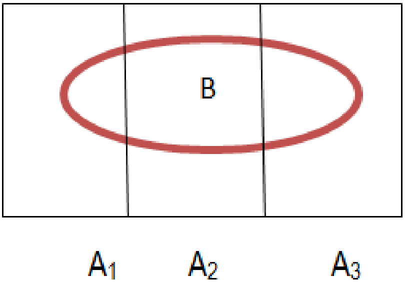


Figura 8. Diagrama de Venn sobre la Regla de probabilidad total.

Sean A_1, A_2,..... , A_k un conjunto de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos definidos en S ,entonces cualquier evento B definido en S puede representarse por:

$P(B) = P(B.A_1) + P(B.A_2) + ... + P(B.A_k)$

$P(B) = P(B/A_1).P(A_1) + P(B/A_2).P(A_2) + ... + P(B/A_k).P(A_k)$

Entonces la Regla de probabilidad total se puede sintetizar como:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B\ /A_i).P(A_i)$$

Para ejemplificar la aplicación de esta Regla supóngase la siguiente situación: dos equipos automáticos (A y B) fabrican un determinado tipo de pieza que son enviadas a un almacén. Se conoce que del total de piezas en el almacén un 40% han sido producidas por el equipo A y el resto por el B. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa dado que se produjo en el equipo A es de 0,08 y si se produce en B la probabilidad de defectuosa es de 0,05.

En este problema, en el almacén hay dos eventos que son mutuamente excluyentes y exhaustivos, estos son:

A: piezas producidas en el equipo A.

B: piezas producidas en el equipo B.

Las probabilidades de estos eventos son:

$P(A) = 0.40$ pues el 40% de las piezas en el almacén han sido producidas en el equipo A y por tanto $P(B) = 0.60$.

Si se define D: que la pieza sea defectuosa, entonces de los datos del problema:

$P(D/A) = 0.08$

$P(D/B) = 0.05$

Entonces, aplicando la Regla de la Probabilidad Total para este problema se tendrá:

$P(D) = P(D/A).\ P(A) + P(D/B).P(B)$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$P(D) = P(D/A).\ P(A) + P(D/B).P(B) = 0.08x0.40 + 0.05x0.60 = 0.0620$

Y por tanto la probabilidad global de producir una pieza defectuosa es de 0.0620

2.8. Regla o fórmula de Bayes

Supóngase en el ejemplo visto anteriormente, se ha seleccionado una pieza y esta es defectuosa y se desearía calcular la probabilidad de que haya sido producida en el equipo A. Esto se denota por:

P(A/D) probabilidad que dado que es defectuosa haya sido producida por A.

Para calcular esta probabilidad se aplica la denominada Regla de Bayes

Sean A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_k son eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos en S .Si se define un evento B en S y se conoce las P(B / A_i) y las P(A_i), entonces la P(A_i/B) puede calcularse por (Spiegel, Schiller, Srinivasan, 2013):

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i\ ).P(A_i)}{P(B)}$$

Entonces si se aplica al denominador la Regla de la probabilidad total se tiene que:

$$(A_i/B) = \frac{P(B/A_i\ ).P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B/A_i).P(A_i)}$$

Que es la Regla de Bayes.

Para aplicar esta Regla al problema descrito al inicio, de las piezas producidas por un equipo y que van para un almacén y manteniendo la misma notación descrita en la sección anterior, se desea calcular la probabilidad de que, dado que la pieza es defectuosa, haya sido producida en la línea A, esto es P(A/D). Entonces aplicando la Regla de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{P(D\ /A).P(A)}{P(D/A).P(A) + P(D/B).P(B)}$$

Con los valores conocidos:

P(A) = 0,40

P(B)= 0,60

P(D/A)= 0,08

P(D/B)= 0,05

Sustituyendo en la Fórmula de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{0.08x0.40}{0.08x0.40 + 0.05x0.60} = 0.5161$$

2.9. Problemas resueltos de aplicación de la regla de probabilidad total y la regla de Bayes

PR 2.28. El proceso de llenado de botellas de aceite en una empresa, se realiza en 3 líneas de producción (L_1, L_2, L_3).

En la L_1 se envasa el 50% de la producción, mientras que en la L_2 y la L_3 se envasa a partes iguales el resto.

La probabilidad de interrupción del proceso de llenado es de 0.03 dado que fue en la L_1, de 0.05 dado que ocurrió en la L_2 y de 0.8 dado que ocurrió en L_3.

Calcule la probabilidad que:

a) Ocurra una interrupción en el proceso de llenado de botellas de aceite.

b) Dado que ocurrió una interrupción que haya sido en la L_2

SOLUCIÓN

Las probabilidades de producción en cada una de las líneas, viene dado por el por ciento de producción que asume cada una de ellas, esto es:

$P(L_1) = 0.50$

Como en las otras líneas se envasa el resto a partes iguales, entonces:

$P(L_2) = P(L_3) = 0.25$

a) Se define el evento INT como interrupción en el proceso de envase, entonces a partir de los datos del problema:

$P(INT/L_1) = 0.03$

$P(INT/L_2) = 0.05$

$P(INT/L_3) = 0.08$

Por tanto la probabilidad de que haya una interrupción en el proceso de envase se calcula utilizando la Regla de la Probabilidad Total, esto es:

$P(INT) = P(INT/L_1).P(L_1) +P(INT/L_2).P(L_2) + P(INT/L_3).P(L_3)$

$P(INT) = 0.03x0.50 + 0.05x0.25 +0.08x0.25 = 0.015 + 0.0125 + 0.0200 = 0.0475$

P(INT) = 0.0475 **R//**

b) Se pide calcular la probabilidad de que dado que haya interrupción sea en la línea 2. Esto puede denotarse por:

$P(L_2/INT)$ y se calcula utilizando la Regla de Bayes, esto es:

$$P(L_2/INT) = \frac{P(INT/L_2).P(L_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(INT/L_i).P(L_i)}$$

Sustituyendo:

$$P(L_2/INT) = \frac{0.05x0.25}{0.03x0.50 + 0.05x0.25 + 0.08x0.25} = 0.0263$$

$\mathrm{P}P(L_2/INT) = 0.0263$ **R//**

PR 2.29. Una empresa comercializadora de frutas tiene 4 fincas productoras que le suministran productos (F1, F2, F3, F4).

La distribución porcentual de las entregas de las fincas a la empresa comercializadora es de 0.15, 0.40, 0.20 y 0.25 para las fincas F1, F2, F3 y F4 respectivamente.

De igual manera se conoce que la probabilidad de que un lote de producto sea rechazado por la empresa comercializadora dado que proviene de F1 es de 0.06, 0.03 dado que proviene de F2 y de 0.04 si proviene de F3 o F4.

Con esta información calcule las siguientes probabilidades:

a) Que un lote sea rechazado por la empresa comercializadora.

b) Dado que un lote se rechaza provenga de la finca F2.

c) Dado que un lote se rechaza provenga de F2 o F3.

Solución

A partir de los datos brindados en el problema se puede obtener la siguiente información:

Probabilidades que los lotes provengas de las fincas suministradoras:

P(F1) = 0.15

P(F2) = 0.40

P(F3) = 0.20

P(F4) = 0.25

También sí se define R como lote rechazado se tiene que:

P(R/F1) = 0.06

P (R/F2) = 0.03

P(R/F3) = 0.04

P(R/F4) = 0.04

a) A partir de esta información y aplicando la Regla de la Probabilidad Total se tiene que la probabilidad que un lote sea rechazado es:

P(R) = P(R/F1).P(F1) +P(R/F2).P(F2) + P(R/F3).P(F3) + P(R/F4)P(F4)

Sustituyendo los valores numéricos:

P(R) = 0.06x0.15 + 0.03x0.40 + 0.04x0.20 + 0.04x0.25

P(R) = 0.0090 + 0.0120 + 0.0080 + 0.010 = 0.039

P(R) = 0.039 **R//**

b) Se pide calcular la probabilidad que dado un lote rechazado este provenga de la Finca F2. Para calcular esta probabilidad se aplicará la Regla de Bayes:

$$P(F_2/R) = \frac{P(R/F_2).P(F_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(R/F_i).P(F_i)}$$

Entonces, el denominador es la probabilidad total calculada en el inciso anterior y sustituyendo se tiene que:

$$P(F_2/R) = \frac{0.03x0.40}{0.039} = 0.3076$$

$P(F_2/R) = 0.3076$ **R//**

c) Se pide calcular la probabilidad que dado que un lote sea rechazado este provenga de las fincas F2 o F3.

Para este cálculo se utiliza nuevamente la Regla de Bayes, tal como se planteó en el inciso anterior, pero considerando que en este caso se plantea la suma de las probabilidades de dos eventos mutuamente excluyentes, por lo que en el numerador de la fórmula hay que considerar los términos relativos a la F2 y F3, entonces:

$$(F2+F3)/R) = P(R/F2)P(F2)/\left(\sum_{I=1}^{4} P(R/FI)P(FI)\right) + \left(P(R/F3)P(F3)\right)/\left(\sum_{I=1}^{4} P(R/FI)P(FI)\right)$$

$$(F2+F3)/R) = \left(P(R/F2)P(F2) + P(R/F3)P(F3)\right)/\left(\sum_{I=1}^{4} P(R/FI)P(FI)\right)$$

Sustituyendo por los valores numéricos se tiene:

$$(F2+F3)/R) = (0.03X0.40 + 0.04X0.20)/0.039 = 0.0200/0.0390 = 0.5128$$

$$(F2+F3)/R) = 0.5128 \qquad R//$$

PR 2.30. Un trabajador ensambla una pieza a partir de dos componentes (C1 y C2) que recibe de procesos anteriores. Cada pieza tiene 3 componentes de C1 y uno de C2. La probabilidad que una pieza resulte defectuoso dado al componente C1 es de 0.10, mientras que es de 0.05 de ser defectuosa dado C2.

Calcule la probabilidad:

a) Que una pieza resulta defectuosa.

b) Que dado que la pieza es defectuosa sea debido al componente C1.

c) Que la pieza sea buena.

Solución

Si se define con la letra D la pieza defectuosa, se tiene la siguiente información:

P(D/C1) = 0.10

P(D/C2) = 0.05

Como cada pieza tiene 3 componentes de C1 y uno de C2, la probabilidad de que un componente sea C1 es de 0.75 y de C2 es 0.25, esto es:

P(C1) = 0.75

P(C2) = 0.25

a) Se pide calcular la probabilidad de que la pieza resulte defectuosa. Para ello se aplica la Regla de la Probabilidad Total, tal que:

P(D) = P(D/C1).P(C1) +P(D/C2).P(C2)

Sustituyendo:

P(D) = 0.10x0.75 + 0.05x0.25 = 0.0750 + 0.0125 = 0.0875

P(D) = 0.0875 **R//**

b) La probabilidad que se pide en este inciso puede denotarse por:

P(C1/D)

Y para calcularla debe aplicarse la Regla de Bayes, por tanto:

$$P(C_1/D) = \frac{P(D\ /C_1).P(C_1)}{P(D\ /C_1).P(C_1) + P(D\ /C_2).P(C_2)}$$

Note que el denominador de la Regla de Bayes es la Probabilidad Total que ya fue calculada anteriormente y el numerador es un término de la fórmula de la probabilidad total, en este caso el primero. Entonces sustituyendo los valores numéricos:

$$P\left(\frac{C1}{D}\right) = \frac{0.10x0.75}{0.10x0.75 + 0.05x0.25}$$ P(C1/D) = 0.8571 **R//**

c) Como la pieza producida solo tiene dos resultados posibles mutuamente excluyentes, es buena o es defectuosa, este inciso puede resolverse aplicando la propiedad del complemento. Si se define como B que la pieza sea buena entonces:

P(B) = 1 – P(D)

P(B) = 1 – 0.0875 = 0.9135

P(B) = 0.9135 **R//**

2.10. Problemas propuestos

PP 2.1. Se siembran 4 parcelas experimentales de un mismo cultivo (A, B, C Y D), con dos tratamientos de pesticida distintos (P y Q), uno para A y B y otro para C y D. De 100 plantas sembradas en cada parcela, se muestra en la siguiente tabla la cantidad de plantas que han supervivido en cada parcela con el tratamiento aplicado. De igual forma se muestra la supervivencia en todas las parcelas sin usar pesticida en una réplica de 100 plantas en cada parcela.

TRATAMIENTO	PARCELA			
	A	B	C	D
P	74	86		
Q			78	82
Sin pesticida	56	63	60	68

a) ¿Cuál es la probabilidad de supervivencia utilizando el pesticida P y cuál usando Q?

b) ¿Cuál es la probabilidad de supervivencia en la parcela A dado que se utilizó P?

c) ¿Cuál es la probabilidad de supervivencia sin utilizar pesticida?

d) ¿Cuál es la probabilidad de supervivencia en A o B sin utilizar pesticidas?

e) ¿Cuál es la probabilidad de mejorar la supervivencia utilizando pesticidas?

PP 2.2. En una zona boscosa el 51% son árboles para procesar, el 18% son caobas y el 10% cumplen ambas condiciones. Si se selecciona un árbol aleatoriamente, calcule:

a) Probabilidad de que sea de caoba si es listo para procesar.

b) Probabilidad de que esté listo para procesar dado que es una caoba.

PP 2.3. Se quiere abrir un nuevo negocio de lavado de carros ligeros y para ello se requiere tres tipos de permiso: de localización, de disponibilidad de agua y de tratamiento de los desechos. Estas licencias se otorgan de forma independiente por diferentes organismos del territorio. Se ha estimado que la probabilidad que se otorgue la licencia de localización es de 0.98, la de disponibilidad de agua de 0.94 y la de tratamiento de los residuos de 0.90. Calcule la probabilidad que:

a) Se otorguen las 3 licencias o permisos.

b) Que no se otorgue la de tratamiento de residuos y se otorguen las otras dos.

c) Que se otorguen al menos dos de ellas.

d) Que se otorgue al menos uno de los permisos solicitados.

PP 2.4. Una Agencia de Viajes ofrece varios paquetes de turismo a sus clientes y ha realizado un estudio frecuencial de 200 solicitudes de los mismos el que se muestra en la siguiente tabla:

DURACION	**TIPO DE TURISMO**	
	SOL Y PLAYA	**ECOTURISMO**
5 DIAS	50	20
3 DIAS	70	60

Calcule la probabilidad que:

a) Un cliente solicite un paquete de Sol y Playa

b) Un cliente solicite un paquete de 5 días dado que es de Sol y Playa

c) Un cliente solicite un paquete de 3 días.

d) Un cliente solicite un paquete de Ecoturismo dado que seleccionó un paquete de 3 días.

e) Un cliente solicite un paquete de 5 días y de Sol y Playa.

PP 2.5. Se analizan muestras de agua para detectar plomo y mercurio. El 38% de las muestras presentan niveles tóxicos de plomo o mercurio, el 32% de plomo y el 10% de ambos metales.

a. ¿Son independientes los sucesos: "Nivel tóxico de plomo" y "Nivel tóxico de mercurio"

b. Calcula las probabilidades de una muestra que tenga: 1. Niveles tóxicos de mercurio si tiene niveles tóxicos de plomo 2. Niveles tóxicos solamente de plomo.

PP 2.6. Una tienda de productos ecológicos tiene dos suministradores (S1 y S2) de biofertilizantes. Al suministrador S1 le compran el 30 % del total de biofertilizantes.

Se conoce por estudios realizados que hay una probabilidad de 0.04 de que un biofertilizante no alcance la efectividad deseada que ofrece la tienda dado que fue suministrado por S1, mientras que esta probabilidad se duplica dado que fue suministrado por S2. Con esta información, si se selecciona aleatoriamente un saco de biofertilizante, determine la probabilidad que:

a) No cumpla con la efectividad que ofrece la tienda.

b) Dado que el saco no cumplió con la efectividad, que haya sido suministrado por S2.

c) Dado que el saco cumplió con la efectividad que haya sido suministrado por S1.

d) Que el saco cumpla con la efectividad que ofrece la tienda.

PP 2.7. En un parque natural se detectan tres plagas. El 25% de los árboles tienen la enfermedad A, el 20% la B y el 30% la C. El 12% la A y la B, el 10% la A y la C, el 11% la B y la C y el 5% tienen las tres enfermedades. Calcular las probabilidades siguientes:

a) Un árbol tenga alguna de las enfermedades 2.

b) Un árbol tenga la enfermedad A pero no la B.

c) Un árbol tenga la enfermedad B y C pero no la A.

PP 2.8. Se quiere integrar un grupo de 2 estudiantes para realizar un proyecto de conservación ambiental. Hay 8 estudiantes con posibilidades de integrar dicho equipo de los cuales 3 son varones y el resto hembras. Calcule la probabilidad que:

a) Que los dos integrantes sean varones.

b) Que los dos sean del mismo sexo.

c) Que el segundo seleccionado sea varón dado que el primero era hembra.

d) Que el segundo seleccionado sea hembra dado que el primero fue hembra.

PP 2.9. En un grupo de amigos el 80 % trabaja vinculados a proyectos de desarrollo local. Entre los trabajan en dichos proyectos, el 75 % lo hace en proyectos de desarrollo agrícola. Finalmente, un 15 % trabajan en proyectos de desarrollo agrícola pero no vinculados a proyectos de desarrollo local. Si se selecciona una persona de este grupo, calcule la probabilidad que:

a) Que trabaje en un proyecto de desarrollo local y que sea de desarrollo agrícola.

b) Que, dado que trabaja en proyectos de desarrollo local, lo haga en proyectos no agrícolas

c) ¿Qué porcentaje trabajan en proyectos de desarrollo agrícola?

PP 2.10. En una ciudad se ha estudiado que la probabilidad que una familia consuma más de 6 000 lt de agua al mes es de 0.80. Si se seleccionan 3 familias aleatoriamente de esta ciudad y se puede asumir independencia en el consumo mensual de agua de ellas, calcule la probabilidad que:

a) Las 3 consuman más de 6 000 lt en un mes

b) Que exactamente una de las familias consuma más de 6 000 lt y las otras dos menos de 6 000 lt.

c) Que las 3 consuman menos de 6 000 lt

PP 2.11. Un vendedor de verduras recibe sus productos de 3 plantaciones (A, B y C). Se ha podido estimar, por pruebas de laboratorio, que hay una probabilidad de 0.0005 de que los productos de la plantación A tengan residuos de pesticida, una probabilidad para la plantación B de 0.0010 y para la plantación C de 0.0002. Si el vendedor recibe el 50% de los productos de la plantación C y el resto en igual proporción de A y B, calcule la probabilidad que:

a) Que los productos recibidos no tengan residuos de pesticida.

b) Dado que existe residuos de pesticida, que el producto proceda de la plantación A.

c) Dado que existe residuos de pesticida que el producto provenga de la plantación A o B.

PR 2.30. Los residuos sólidos generados en una ciudad contienen un 30% de residuos orgánicos, un 40% de plásticos y el resto de otros componentes. Si se tomara un contenedor recolector de residuos sólidos aleatoriamente de esa ciudad, calcule la probabilidad que:

a) Tenga los tres tipos de residuos.

b) Tenga solamente residuos orgánicos y plásticos.

c) Tenga solamente otros componentes.

Asuma independencia entre los tipos de componentes.

PP 2.12. Un pequeño hotel tiene 30 habitaciones distribuidas 10 en cada piso y numeradas del 10 al 40. Si se toma aleatoriamente una llave, cual es la probabilidad que:

a) Sea una habitación con un número par,

b) Sea una habitación del 2do piso.

c) Sea una habitación cuyo número sea menor que 25.

Si se seleccionan dos llaves al azar, cual es la probabilidad:

d) Que ambas sean del 3er piso.

e) Que ambas tengan como 2do digito el número 2.

PP 2.13. Un hotel tiene la iniciativa de hacer una rifa semanal sobre educación ambiental, para seleccionar, entre los turistas que han reservado una semana, dos de ellos para hacerle un presente. En la actual semana hay la siguiente composición de los 100 turistas que participarán en la rifa, 40 son mujeres y el resto hombres, 30 son menores de 30 años, 50 están entre 31 y 50 y el resto es mayor de 51 años.

Calcule:

a) La probabilidad de que el primero que se seleccionen dos mujeres.

b) Que la primera seleccionada sea una mujer.

c) Que el primero sea menor de 30 años y el otro mayor.

d) que los dos seleccionados estén en el mismo rango de edades.

e) Si se sabe que la probabilidad de que sea casado dado que es menor de 30 es de 0.25, ser casado si está entre 31 y 50 es de 0.75 y ser casado dado que es mayor de 50 es de 0.90, ¿cuál es la probabilidad que un turista seleccionado aleatoriamente sea casado?

PP 2.14. El viaje entre dos ciudades puede hacerse por tres carreteras (I,II,III). Existe la posibilidad de que ocurra interrupciones durante el viaje debido a deslaves u otras causas. La probabilidad de interrupción del viaje dado que se seleccionó la carretera I es de 0.08, de 0.06 dado que se seleccionó la II y de 0.03 dado que se seleccione la III. Si de un estudio se ha encontrado que de 1000 autos, 150 viajan por la carretera I, 200 lo hacen por la II y el resto selecciona la III, calcule la probabilidad que:

a) Ocurra una interrupción en el viaje entre las dos ciudades.

b) Dado que hubo una interrupción, que haya sido en la carretera III.

c) Dado que hubo una interrupción que haya sido en la carretera II.

d) Que el viaje se realice sin interrupción.

e) Dado que ocurrió una interrupción haya sido por las carreteras II o III.

PP 2.15. Un vendedor de purificadores de agua tiene conocimiento de que hay dos clientes potenciales interesados en comprarle equipos. El cliente A puede comprar desde uno hasta 3 equipos mientras el B puede comprar desde 2 hasta 6 equipos. Calcule la probabilidad que:

a) Ambos clientes compren el mínimo de equipos

b) Que el cliente A compre al menos 2 equipos y el segundo al menos 4.

c) Que entre los dos clientes compren más de 5 equipos.

d) Que entre los dos clientes compren menos de 3 equipos.

PP 2.16. Un estudiante que utiliza el autobús para ir a su centro de estudio, ha recopilado información y ha determinado las siguientes probabilidades: si el ómnibus pasa en tiempo la probabilidad de llegar a tiempo para la clase es de 0.96. Si el ómnibus pasa atrasado la probabilidad de llegar a clases en tiempo se reduce a 0.72. Calcule la probabilidad que:

a) Llegue a tiempo a la clase.

b) Dado que llegó a tiempo, que haya tomado el ómnibus con atraso.

c) Que llegue atrasado a la clase.

PP 2.17. Un cliente que arriba a una panadería tiene una probabilidad de comprar pan de 0.92, la probabilidad de que compre dulce es de 0.80 y la probabilidad de que compre ambas cosas es de 0.86. Calcule la probabilidad que:

a) Compre pan o dulce.

b) Que compre pan dado que compró dulce.

c) Que no compré pan dado que compró dulce.

PP 2.18. Una persona recibe dos periódicos cada mañana (P1 y P2). La probabilidad de que lea solamente P1 es de 0.80 y que lea solo P2 es de 0.90 y que lea ambos es de 0.65.

Calcule la probabilidad que:

a) Que lea P1 dado que leyó P2.

b) Que lea P2 dado que leyó P1.

c) Que lea al menos uno de los periódicos que recibe.

PP 2.19. Una empresa textil produce toallas de dos tipos (T1 y T2), las cuales se envasan en docenas y se envían para el almacén. La producción de toallas T1 es el 30% de la producción total y el resto es del tipo T2.

Se conoce que la probabilidad de que un paquete de toallas sea defectuoso dado que es del tipo T1 es de 0.01, mientras de que sea defectuoso dado que es del tipo T2 es de 0.10.

Con esta información, si se selecciona un paquete de toallas aleatoriamente de almacén determine la probabilidad que:

a) Sea defectuosa y del tipo T1.

b) Sea buena y del tipo T1.

Si se seleccionan 2 paquetes de toallas aleatoriamente del almacén (asuma independencia):

c) Que ambas sean del tipo T1.

d) Que las dos sean del mismo tipo (T1 o T2).

e) Que la primera que se seleccione sea del tipo T2 y la segunda de cualquier tipo.

PP 2.20. De los 39 alumnos de una clase, 16 escogieron francés y 27 inglés. Nueve alumnos eligieron ambos, y el resto no escogió ninguno de ellos. Si se elige al azar un alumno de dicha clase, halla las siguientes probabilidades.

a) Escogió francés.

b) Escogió inglés.

c) Escogió ambos idiomas.

d) Escogió francés o inglés.

PP 2.21. Un médico ha observado que el 40% de sus pacientes fuma y de estos, el 75% son hombres. Entre los que no fuman, el 60% son mujeres. Calcula la probabilidad de:

a) Un paciente no fumador sea hombre.

b) Un paciente sea hombre fumador.

c) Un paciente sea mujer.

d) Sabiendo que el paciente ha sido hombre, qué probabilidad hay de que sea fumador.

PP 2.22. Una familia tiene tres hijos. Asumiendo una probabilidad igual que sea varón o hembra, construir un diagrama de árbol y calcular las siguientes probabilidades:

a) El primer hijo sea niña

b) Exactamente dos sean niñas.

c) Se cumplan ambas condiciones.

d) Exactamente dos sean niñas, si el primero es niña

PP 2.23. Una empresa farmacéutica ecuatoriana tiene tres delegaciones, Quito, Guayaquil y Ambato. De un determinado fármaco se produce el 45% en la delegación de Quito, el 30% en Guayaquil, y el 25% en Ambato. Del total de los fármacos, son defectuosos el 5% de los producidos en Quito, el 3% en Guayaquil y el 4% en Ambato. Calcular:

a) Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso

b) Si un fármaco es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Granada

PP 2.24. En una asignatura de primer curso de una titulación universitaria, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 que hay matriculados. Además, se sabe que aprueban el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 15 % de los que no asisten. So se elige al azar un alumno matriculado, calcular la probabilidad de:

a) Que haya asistido a clases y haya desaprobado.

b) No ha asistido a clase y ha aprobado.

c) Haya aprobado.

b) Si elige al azar un alumno de los que han aprobado, que ha asistido a clase.

PP 2.25. Las probabilidades de aprobar los exámenes de Historia, Lengua e Inglés, para un alumno determinado, son: 2/3, 4/5 y 3/5, respectivamente. Obtener las probabilidades de:

a) Suspender las tres asignaturas.

b) Suspender solo una de las tres.

c) Suspender Lengua si se sabe que solo suspendió una asignatura de las tres.

PP 2.26. En una segunda vuelta de unas elecciones presidenciales de un país sudamericano en la que solo quedan dos candidatos A y B, el 45% de los votantes votan al candidato A de los cuáles un 54% proviene del sur del país. Del 55% de los que votan al candidato ganador B, el 60% proviene del norte del país. Elegido un votante al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Provenga del sur del país.

b) Haya votado al candidato A y sea del norte del país.

PP 2.27. En una población hay el doble de mujeres que de hombres. El 25 % de las mujeres son rubias y el 10 % de los hombres también son rubios. Calcular: a) Si se elige al azar una persona y resulta ser rubia, calcule la probabilidad de que:

a) Sea mujer.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre y no sea rubio?

PP 2.28. En una empresa, el 20 % de los trabajadores son mayores de 45 años, el 8 % desempeña algún puesto directivo y el 6 % es mayor de 45 años y desempeña algún puesto directivo.

a) ¿Qué porcentaje de trabajadores tiene más de 45 años y no desempeña ningún cargo directivo?

b) ¿Qué porcentaje de trabajadores no es directivo ni mayor de 45 años?

c) Si la empresa tiene 150 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tiene más de 45 años?

PP 2.29. Dos expertos, E1 y E2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E1 es 0,55 y por E2 es 0,45. Si una peritación ha sido realizada por E1, la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es de 0,98 y si ha sido realizada por E2, la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es de 0,90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E2.

PP 2.30. Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0,2 %, mientras que dicha proporción es 0,5 % en la segunda, y 0,1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

PP 2. 31. En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.

b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

PP 2.32. Una fábrica produce un elemento mecánico ensamblando dos componentes A y B. Se sabe que la probabilidad de que el componente A sea defectuoso es de 0,001 y la de que B no lo sea es de 0,997. Se elige al azar un elemento, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Solamente el componente A es defectuoso.

b) Ninguno de los componentes es defectuoso.

c) Ambos componentes son defectuosos.

d) Solamente uno de los componentes es defectuoso.

PP 2.33. El estudio sobre los créditos concedidos por un banco multinacional el pasado año revela que el 42 % de dichos créditos se ha concedido a clientes españoles, el 33% a clientes del resto de la Unión Europea y el 25 % a clientes del resto del mundo. De esos créditos, los créditos hipotecarios suponen, respectivamente, el 30 %, el 24 % y el 14 %. Elegido un cliente al azar que ha recibido un crédito, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito concedido no sea hipotecario?

PP 2.34. En una asociación, en la que el 60 % de sus miembros son mujeres, la mitad de estas y el 20 % de los varones asistieron a cierta reunión. Si se elige al azar un miembro de dicha asociación:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea uno de los asistentes?

b) Si la persona elegida no asistió a la reunión, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una mujer?

PP 2.35. Un estudiante cuenta, para un examen con la ayuda de un despertador, el cual consigue despertarlo en un 80% de los casos. Si oye el despertador, la probabilidad de que realiza el examen es 0.9 y, en caso contrario, de 0.5.

a) Si va a realizar el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya oído el despertador?

b) Si no realiza el examen, ¿cuál es la probabilidad de que no haya oído el despertador?

PP 2.36. En una estantería hay 60 novelas y 20 libros de poesía. Una persona A elige un libro al azar de la estantería y se lo lleva. A continuación, otra persona B elige otro libro al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por B sea una novela?

b) Si se sabe que B eligió una novela, ¿cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por A sea de poesía?

PP 2.37. En una empresa trabajan 5 Ingenieros en Gestión Empresarial, 5 Licenciados de Contabilidad y 10 Licenciados en Informática.

Si se seleccionan 3 profesionales al azar, calcule la probabilidad que:

a) Los 3 sean informáticos.

b) Los 3 sean de Gestión Empresarial.

c) Los 3 sean de la misma especialidad.

d) El primero sea informático, el 2do Contador y el 3ero de cualquier especialidad.

Asuma independencia en la selección de las personas.

PP 2.38. Una Agencia de Viajes tiene 8 microbuses para su operación. Como promedio hay 3 buses cada día que tienen problemas para realizar el viaje. Si para un día hay programado 2 viajes en la agencia, determine la probabilidad que:

a) Los dos microbuses seleccionados no puedan realizar el viaje.

b) El 1er bus tenga problema y el 2do pueda realizar el viaje.

c) Que los dos buses puedan dar el viaje o los dos no puedan dar el viaje.

PP 2.39. En un almacén de una tienda de electrodomésticos, hay 20 TV de los cuales 4 están defectuosos. Si se seleccionan 3 TV aleatoriamente, uno a uno y se prueba, calcule la probabilidad que:

a) Los 3 sean defectuosos.

b) Que el primero sea defectuoso y los otros dos buenos.

c) Que al menos uno de los 3 sea bueno.

d) Que exactamente haya un defectuoso entre los 3 seleccionados.

e) Que los 3 sean defectuosos o que los 3 sean bueno.

f) Que el tercero sea bueno y los dos primeros defectuosos.

PP 2.40. En un hotel de cada 20 reservaciones realizadas 4 se cancelan horas antes y 3 no asisten el día de la reservación. Si para mañana hay 3 reservaciones, calcule la probabilidad que:

a) Que las 3 se hagan efectivas.

b) Que una se cancele.

c) Que las 3 no vengan.

d) Que no entre ningún huésped (por cancelación o no asistencia).

e) Que todas se cancelen o no asistan.

PP 2.41. En un aula hay 30 alumnos, de los cuales 20 son mujeres. El 60% de las mujeres practican deportes sistemáticamente, mientras que en los hombres llega al 80%. Si se selecciona un alumno al azar de este grupo.

a) Que sea hombre.

b) Que sea hombre y practique deportes sistemáticamente.

c) Que dado que es hombre practique deportes sistemáticamente.

d) Que dado que practica deportes sistemáticamente sea una mujer.

e) Que sea mujer y no practique deportes sistemáticamente.

f) Que dado que no practica deportes sistemáticamente sea mujer.

g) Que, dado que es un hombre, practique deportes sistemáticamente.

PP 2.42. Tres francotiradores disparan a un mismo blanco. La probabilidad de dar en el blanco del francotirador A es de 0.90, del B 0.85 y del C 0.95. Con esta información determine la probabilidad que:

a) Los 3 tiradores fallen en el blanco.

b) Que el A y el B den en el blanco y C no de.

c) Exactamente uno de en el blanco.

d) Los tres dan en el blanco.

e) Al menos uno da en el blanco.

PP 2.43. En un Banco, los clientes que arriban al servicio de las cajas, tienen la siguiente probabilidad de demorar un tiempo que se muestra en la siguiente tabla:

Menos de 10 minutos	0.10
Entre 10 y 15 minutos	0.50
Entre 16 y 20 minutos	0.30
Más de 20 minutos	0.10

Al banco arriban al servicio de caja un 40% de mujeres y un 60% de hombres. Si se puede asumir independencia entre el sexo y el tiempo de demora en el banco, calcule la probabilidad que:

a) Sea mujer y demore más de 20 minutos.

b) Que sea hombre y demore menos de 15 minutos.

c) Que dado que demoró más de 20 minutos sea un hombre.

e) Que demore más de 15 minutos y sea mujer.

f) Que dado que es mujer demore más de 15 minutos.

PP 2.44. En un almacén hay 10 TV marca LG, 30 marca Samsung y 20 marca RC. Si se selecciona, uno a uno, aleatoriamente 3 TV de este almacén, asumiendo independencia, calcule la probabilidad que:

a) Todos sean Samsung.

b) Que haya uno de cada marca.

c) Que haya 2 Samsung y el otro sea LG.

d) Que haya al menos 1 Samsung.

e) Que haya al menos 2 LG.

f) Que los 3 seleccionados sean de la misma marca.

PP 2.45. Se desea realizar el plan de reforestación de una zona boscosa en un territorio. El cumplimiento del plan dependerá de 3 factores: cumplimiento del plan de entrega de plántulas, cumplimiento del financiamiento solicitado y cumplimiento de la entrega de equipos.

La probabilidad estimada de cumplir el plan de reforestación dado que se cumpla la entrega de plántulas es de 0.96, dado que se cumpla el financiamiento es de 0.98 y dado que se cumpla la entrega de equipos es de 0.95.

Los organismos comprometidos con la entrega de estos recursos aseguran una probabilidad de 0.98 de cumplir con la entrega de plántulas, 0.99 de cumplir con el financiamiento y 0.95 de cumplir con la entrega de equipos. Con esa información calcule la probabilidad:

a) De cumplir el plan de reforestación.

b) Dado que se cumplió el plan de reforestación sea por el cumplimiento de la entrega del financiamiento.

c) Dado que se cumplió el plan de reforestación sea por el cumplimiento del plan de financiamiento y de entrega de las plántulas.

Capítulo III. Variables aleatorias

3.1. Concepto de variable aleatoria

En la experimentación estadística es usual que el investigador trate de representar los eventos de interés por medio de variables y así hacer corresponder a los posibles resultados del experimento valores de esas variables que al tener un comportamiento probabilístico se les conoce con el nombre de Variables aleatorias.

DEFINICIÓN: *Una Variable aleatoria es una función que asocia un número real a cada punto del Espacio muestral.*

Ejemplo 3.1. En el problema PR 3.21 visto en el Capítulo anterior y referido al funcionamiento de 3 baterías para el tratamiento de aguas residuales en un hotel (A, B, C), donde F es si la batería funciona y N si no funciona, se definió el siguiente espacio muestral.

BATERÍA			
A	B	C	
F	F	F	
N	F	F	
F	N	F	
F	F	N	
N	N	F	
N	F	N	
F	N	N	
N	N	N	

Si se define x: número de baterías funcionando, entonces esta tomaría los siguientes valores:

BATERÍA			
A	B	C	x
F	F	F	3
N	F	F	2
F	N	F	2

F	F	N	2
N	N	F	1
N	F	N	1
F	N	N	1
N	N	N	0

Donde x = 0,1, 2, 3

Variables aleatorias discretas: Son aquellas que están asociadas a Espacios muestrales finitos o infinitos numerables. Toman solo valores puntuales del conjunto de números reales y generalmente del conjunto de números enteros. Los datos cualitativos que se miden en escala nominal u ordinal son ejemplos de variables aleatorias discretas. Ejemplos:

Variables Cuantitativas

- Número de baterías funcionando para el tratamiento de aguas residuales en un hotel
- Resultados del lanzamiento de un dado.
- Cantidad de proyectos de desarrollo local en un territorio.

Variables Cualitativas:

- Ligeramente nublado; Nublado; Muy nublado.
- Evaluación de la contaminación en un caudal de agua: muy alto, alto, medio, poco y muy poco.
- Calidad de un producto: Excelente; Bien; Regular; Mal y Pésimo.

Variables aleatorias continuas: Son aquellas que están asociadas a Espacios muestrales infinitos. Toman cualquier valor en el campo de los números reales. Están asociadas generalmente a datos cuantitativos que se miden a escala de intervalo o de razón.

Ejemplos:

- Medición en porciento de la contaminación de hidrocarburos en el agua.
- La cantidad de desperdicios (kg) en una carpintería mensualmente.
- El diámetro de un árbol maderable.
- Medición en porciento de la cantidad de grasa en leche.

Las variables. discretas están asociadas a datos que se cuentan y las V. A. continuas a datos que se miden.

3.2. Distribuciones de probabilidad para variables discretas

Para la total descripción de una variable es necesario conocer la probabilidad correspondiente a cada valor de la variable

DEFINICIÓN: *Se define como Función de Probabilidad de la V.A. discreta x a una función p (x) que asocia una probabilidad a cada valor de la V. A: y que cumpla los siguientes requisitos:*

1. $p(x) \geq 0$ para cualquier valor de x.
2. $\sum p(x) = 1$ para toda $x \in Z$ (conjunto de los números enteros)
3. $P(x = a) = p(a)$.

La Función de Probabilidad puede representarse en forma tabular o por una expresión matemática. También recibe el nombre de Función Probabilística de Masa.

Ejemplo 3.2. Para el problema relacionado con el número de baterías para el tratamiento de residuales en un hotel:

a) Defina la Función de Probabilidad para esta variable aleatoria.

b) Calcule la probabilidad que ha exactamente dos baterías funcionado.

c) Calcule la probabilidad que haya una o menos baterías funcionando.

d) Calcule la probabilidad que haya más de una y hasta 2 baterías funcionando.

e) Que haya al menos una batería funcionando.

La Función de Probabilidad para la variable aleatoria que identifica el número de baterías para el tratamiento de aguas residuales en un hotel, puede hallarse aplicando la Ley de la Multiplicación y de la Suma para eventos independientes, para cada valor de la variable aleatoria. En la última columna de la derecha se muestra el resultado de estos cálculos.

BATERÍA				
A	**B**	**C**	**x**	**PROBABILIDAD**
F	F	F	3	0.612

N	F	F	2	0.153
F	N	F	2	0.108
F	F	N	2	0.068
N	N	F	1	0.012
N	F	N	1	0.017
F	N	N	1	0.027
N	N	N	0	0.003

a) Entonces la Función de Probabilidad es:

x	0	1	2	3
p(X)	0.003	0.056	0.329	0.612

b) A partir de su Función de Probabilidad, se pueden calcular todas las probabilidades asociadas a esta variable. Por ejemplo, si se desea calcular la probabilidad que haya 2 baterías funcionado, se plantea:

$P(x=2) = p(2) = 0.329$.**R//**

c) La probabilidad que haya una o menos batería funcionando será:

$P(x\leq 1) = P(x=0) + P(x=1) = p(0) + p(1) = 0.003 + 0.056 = 0.059$

$P(x\leq 1) = 0.059$ **R//**

d) La probabilidad que haya 2 ó 3 baterías funcionando es:

$P(x=2) + P(x=3) = p(2) + p(3) = 0.329 + 0.612 = 0.941$

$P(x=2) + P(x=3) = 0.941$ **R//**

e) La probabilidad que haya al menos una batería funcionando puede calcularse sumando la probabilidad de que funciones 1 ó 2 ó 3, o sea la suma de p(1), p(2) y p(3), pero también puede hacerse uso del complemento y plantear:

$P(x\geq 1) = 1 - P(x<1) = 1 - P(x=0) = 1 - p(0) = 1 - 0.003 = 0.993$

$P(x\geq 1) = 0.993$ **R//**

Note que, para el caso de variables discretas, es importante tener clara lo que se quiere calcular para hacer el planteamiento. Por ejemplo:

Que haya al menos una batería funcionando: $P(x \geq 1)$

Que haya más de una batería funcionando: $P(x>1) = P(x \geq 2)$

No más de una batería funcionando: $P(x \leq 1)$

Menos de una batería funcionando: $P(x<1) = P(x=0)$

3.3. Función de distribución acumulada de una variable discreta

DEFINICIÓN: *La Función de Distribución Acumulada de una V. A. Discreta x con Función de Probabilidad f (x) viene expresada por:*

$F_x(t) = P(x \leq t) = \sum_{x=-\infty}^{x=t} p(x)$

Propiedades:

1. $F_x(t)$ es una función no decreciente.
2. $F_x(\infty) = 1$
3. $P(a< x \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$

Note que a partir de la Función de Probabilidad se construye la Función de Distribución Acumulada y viceversa. Por tanto, de acuerdo a como sea más fácil buscar la información, se construirá una de ellas y después a partir de esta la otra.

Ejemplo 3.3. Para el ejemplo de las baterías en los hoteles, usando la Función de Probabilidad:

a) Construya la Función de Distribución Acumulada

b) Calcule la probabilidad de que el número de baterías funcionando sea menor de dos.

c) Calcule la probabilidad de que el número de baterías funcionando sea mayor que una y menor que dos.

Solución

a) La Función de Distribución Acumulada para esta variable puede construirse sumando las probabilidades de que la variable sea menor o igual que un valor dado. Así:

$F_x(1) = p(0) + p(1) = 0.003 + 0.056 = 0.059$

$F_x(2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0.003 + 0.056 + 0.329 = 0.388$

Finalmente queda como:

t	0	1	2	3
$F_x(t)$	0.003	0.059	0.388	1.00

b) Para calcular la probabilidad que $x \leq 2$,o sea Fx(2), se puede encontrar este valor directamente en la Función de Distribución Acumulada para t=2 y es 0.388

$F_x(2) = 0.388$ **R//**

c) Si se quisiera calcular la $P(1<x\leq 2)$ usando la Función de Distribución Acumulada, entonces:

$P(1<x\leq 2) = F_x(2) - F_x(1) = 0.388 – 0.059 = 0.329$

$P(1 < x \leq 2) = 0.329$ **R//**

3.4. Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas

Para variables continuas la probabilidad en un punto $P(x = a)$ no existe y solo se mide la probabilidad en los intervalos, o sea, por ejemplo, $P (a \leq x \leq b)$.

La función que permite determinar esta probabilidad se denomina Función de Densidad Probabilística (PDF), la cual es una función continua y el área bajo su curva, en un intervalo de valor de la variable aleatoria, es la probabilidad del mismo.

DEFINICIÓN: *La función f(x) es una función de Densidad Probabilística para la variable continua si cumple que:*

1. $f (x) \geq 0$ para todo $x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P (a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Ejemplo 3.4. El tiempo que demora la terminación de un pequeño proyecto de desarrollo local en días, es una variable aleatoria que tiene la siguiente Función de Densidad Probabilística:

f(x) = $\frac{1}{20}x \quad para\ 70 \leq x \leq 90$ días

Se desea:

a) Comprobar si la expresión anterior cumple la 2da condición de una Función de Densidad Probabilística.

a) Calcularla probabilidad de que el proyecto demore 80 días o menos.

b) Calcularla probabilidad de que el proyecto demore entre 75 y 80 días.

a) Primeramente se probará si dicha función cumple la 2da propiedad de una Función de Densidad probabilística.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{70}^{90} \frac{1}{20}x\,dx = \frac{1}{20}x]_{70}^{90} = \frac{90-70}{20} = 1 \textbf{ R//}$$

Por lo que cumple la condición dada.

b) Para calcular la probabilidad de que el proyecto dure 80 días o menos se plantea:

$$P(70 \leq x \leq 80) = \int_{70}^{80} \frac{1}{20}x\,dx = \frac{1}{20}x]_{70}^{80} = \frac{80-70}{20} = 0.5$$

$$P(70 \leq x \leq 80)\ ) = 0.5 \quad \textbf{R//}$$

c) La probabilidad que el proyecto demore entre 75 y 80 días se puede calcular por:.

$$\mathbf{P(75 \leq x \leq 80) = \int_{75}^{80} \frac{1}{20}x\,dx = \frac{1}{20}x]_{75}^{80} = \frac{80-75}{20} = 0.25}$$

$$\mathbf{P(75 \leq x \leq 80) P(75 \leq x \leq 80)} = 0.25 \textbf{ R//}$$

3.5. Función de distribución acumulada para una variable continua

La Función de Distribución Acumulada para el caso de la V.A. continua se define como:

$$Fx(t) = P(x \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

PROPIEDADES:

1. $F_x(t)$ es una función no decreciente.
2. $F_x(\infty) = 1$
3. $P(a \leq x \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$

Ejemplo 3.5. Utilizando la misma Función de Densidad Probabilística del ejemplo anterior del tiempo de duración en la confección de un proyecto de desarrollo local, encuentre:

a) La Función de Distribución Acumulada para esa variable

b) La probabilidad que el proyecto demore menos de 78 días.

Solución

a) La Función de Distribución Acumulada para esta variable puede encontrarse por:

$$F_x(t) = \int_{70}^{t} \frac{1}{20} x\, dx = \frac{t-70}{20}$$

Por tanto:

$$F_x(t) = \frac{t-70}{20}$$ para $70 \leq t \leq 90$ **R//**

b) La probabilidad que el proyecto se haga en menos de 78 días puede plantearse como: $P(x \leq 78)$

Y aplicandodirectamente la Función de DistribuciónAcumulada para esta variables se tiene que :

$F_x(78) = (78 - 70) / 20 = 0.40$

$P(x \leq 78) = 0.40$ **R//**

3.6. Valor esperado de una variable aleatoria

El valor esperado o esperanza matemática o media de una V.A. es un valor numérico que mide la tendencia central de la variable en cuestión. Esta medida puede interpretarse como un promedio en un gran número de pruebas de la V. A.

DEFINICIÓN: *Sea x una V.A. con Distribución de Probabilidad f(x) . La media o valor esperado de x es:*

$$\mu = E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)$$ *si x es discreta.*

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.f\,(\,x\,)dx\ si\ x\ es\ continua$$

$-\infty$

Si g (x) es una función cualquiera de la V.A. x , entonces, g (x) es también una V.A. con media igual a :

$$\mu = E\,(g\,(\,x\,)) = \sum_{-\infty}^{\infty} g\,(\,x\,)\,.\,f\,(\,x\,)$$ *si x es discreta.*

$$\mu = E\,(g\,(\,x\,)) = \int_{-\infty}^{\infty} g\,(\,x\,)\,.\,f\,(\,x\,)\,dx$$ *si x es continua.*

Ejemplo 3.6. Para calcular el valor esperado del número de baterías funcionando en el hotel en un día, se procede de la siguiente forma:

$$\mu = E\,(x\,) = \sum_{-\infty}^{\infty} x\,.\,f\,(\,x\,)$$

Sustituyendo:

μ = 0*0.003 + 1*0.056 + 2*0.329 + 3*0.612 = 2.55 baterías

$\mu = 2.55$ baterías **R//**

Propiedades del valor esperado.

* El valor esperado de una constante es la misma constante.

$$E(C) = C$$

* Si a y b son constantes, entonces:

$$E(a + b.x) = a + b . E(x)$$

* El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de la V.A. x es igual a la suma o diferencia de los valores esperados de las funciones.

$$E(g(x)+h(x)) = E(g(x)) + E(h(x))$$

3.7. Varianza de una variable aleatoria

La Varianza de una variable aleatoria es una medida de la variabilidad o dispersión que tiene la variable respecto a su media.

DEFINICIÓN: *Sea x una V.A: con distribución de probabilidad f (x) y media μ . La varianza de x es:*

$$V(x) = \sigma^2 = E(x - \mu)^2$$

$V(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 . f(x)$ *si x es discreta.*

$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 . f(x)\, dx$ *si x es continua.*

También la varianza puede ser calculada por la expresión:

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

Propiedades de la varianza.

* La varianza de una constante es cero.

$$V(C) = 0$$

* Si a y b son constantes, entonces:

$V(a + b.x) = b^2 V(x)$

Ejemplo 3.7. La varianza para el ejemplo de las baterías podría calcularse por:

$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$

$E(x^2) = \sum x^2 f(x) = 0^2*0.003 + 1^2 * 0.056 + 2^2 * 0.326 + 3^2 * 0.612 = 0 +0.056+ 1.304+ 5.508$

$E(x^2) = 6.868$

$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 6.868 – 2.55^2 =6.868-6.502 = 0.366$

$V(x) = 0.366$ **R//**

3.8. Desviación típica o estándar

Se define la Desviación típica o estándar de una variable aleatoria x, a la raíz cuadrada de la Varianza. Se denota con el símbolo σ

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

La Desviación típica o estándar, al igual que la Varianza, mide la desviación que tiene la variable con respecto a su Valor Medio o Esperado. Esto significa que, a mayor valor de la Desviación Típica, mayor dispersión de los datos hay con respecto a la Media.

La Desviación Típica es muy usada en la Estadística, puesto que dimensionalmente, mantiene la misma unidad de medida que la Media, esto es, si la Media está en kilogramos, la Desviación Típica está en kilogramos también.

3.9. Problemas resueltos de variables aleatorias

PR 3.1. La cantidad de carros recolectores de desperdicios sólidos trabajando en una pequeña ciudad en un día es una variable aleatoria con la siguiente Función de Probabilidad:

No. de carros	2	3	4	5
Probabilidad	0.20	0.20	0.50	0.10

Construya la Función de Distribución Acumulada para esta variable.

Calcule la probabilidad que:

a) Que trabajen exactamente 3 carros.

b) Que trabajen entre 3 o 4 carros.

c) Que trabajen 4 carros o menos en un día.

d) Que trabajen al menos 3 carros en un día.

e) Calcular el Valor Esperado y la Varianza para esta variable.

Solución

La Función de Distribución Acumulada se determina a partir de la Función de Probabilidad, sumando las probabilidades hasta el valor de t. Así:

$F_x(2) = f(2) = 0.20$

$F_x(3) = f(2) + f(3) = 0.20 + 0.20 = 0.40$

$F_x(4) = f(2) + f(3) + f(4) = 0.20 + 0.20 + 0.50 = 0.90$

Por tanto, la Función de Distribución Acumulada puede representarse en la siguiente tabla:

No. de carros (t)	2	3	4	5
$F_x(t)$	0.20	0.40	0.90	1.00

a) Se pide calcular:

$P(x=3) = f(3)$

De la Tabla de Función de Probabilidad, $f(3) = 0.20$ y por tanto:

$P(x=3) = 0.20$ **R//**

b) La probabilidad de que trabajen 3 o 4 carros puede calcularse como:

$P(x=3) + P(x=4) = f(3) + f(4) = 0.20 + 0.50 = 0.70$

$P(x=3) + P(x=4) = 0.70$ **R//**

c) Lo que se pide calcular es $P(x \leq 4)$. El cálculo puede hacerse de dos formas:

Usando la Función de Probabilidad

$P(x \leq 4) = f(2) + f(3) + f(4) = 0.20 + 0.20 + 0.50 = 0.90$

Usando la Función de Distribución Acumulada:

$P(x \leq 4) = F_x(4) = 0.90$

$P(x \leq 4) = 0.90$ **R//**

c) Se pide calcular $P(x \geq 3)$

Usando la Función de Probabilidad

$P(x \geq 3) = f(3) + f(4) + f(5) = 0.20 + 0.50 + 0.10 = 0.80$

Usando la Función de Distribución Acumulada:

$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - F_x(2) = 1 - 0.20 = 0.80$

$P(x \geq 3) = 0.80$ **R//**

d) El Valor Esperado del número de carros que trabajan en un día puede calcularse por:

$$\mu = E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) = \sum_{2}^{5} x\, f(x)$$

$$\mu = E(x) = 2 * 0.20 + 3 * 0.20 + 4 * 0.50 + 5 * 0.10$$

$$\mu = E(x) = 3.5\ carros$$ **R//**

La varianza puede calcularse por:

$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$

$E(x^2) = \sum x^2 f(x) = 2^2 * 0.20 + 3^2 * 0.20 + 4^2 * 0.50 + 5^2 * 0.10 =$

$E(x^2) = 13.10$

$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 13.10 - 3.5^2 = 13.10 - 12.25 = 0.85$

$V(x) = 0.85$ **R//**

PR 3.2. El volumen de un envase de 1000 ml de champú Estrella es una variable aleatoria con la siguiente Función de Probabilidad:

f(x) = 1/8 para 996 ≤ x ≤ 1004

Encuentre la Función de Distribución Acumulada para esta variable.

Calcule las siguientes probabilidades:

a) Que el envase tenga exactamente 1000 ml.

b) Que tenga menos de 1000 ml.

c) Que tenga entre 998 y 1002 ml.

d) Calcule el Valor Esperado y la desviación estándar para esta variable.

Solución

Para definir la Función de Distribución Acumulada para esta variable, puede utilizarse la Función de Densidad Probabilística y se plantea:

$$Fx(t) = P(x \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Para este problema :

$$Fx(t) = P(x \leq t) = \int_{996}^{t} \frac{1}{8} dx = \frac{t-996}{8}$$

$Fx(t) = \dfrac{t-996}{8}$ para 996 ≤ t ≤ 1004

a) Probabilidad que el envase tengaexactamente 1000 ml, esto es :

P(x = 1000) = 0

Porque en problemas con variables continuas la probabilidad, viene dada por el área bajo la curva de la función y en un punto es igual a cero.

b) Probabilidad que tengamenos de 1000 ml, o sea, P(x ≤ 1000). Esto puede resolverse utilizando directamente la Función de DistribuciónAcumulada y entonces :

P(x ≤ 1000)= $Fx(1000) = \dfrac{1000-996}{8} = 0.50$

c) Que tenga entre 998 y 1002, esto es, P(998≤ x ≤ 1002), entonces:

$$P(998 \leq x \leq 1002) = \int_{998}^{1002} \frac{1}{8} x \, dx = \frac{1}{8} x]_{998}^{1002} = \frac{1002-998}{8} = 0.5$$

$P(998 \leq x \leq 1002) = 0.5$ **R//**

d) Para calcular el valor medio de una variable continua se plantea:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \textbf{ si x es continua}$$

Para este problema:

$$\mu = E(x) = \int_{996}^{1004} x \cdot \frac{1}{8}dx = \frac{1}{8}x^2]_{996}^{1004} = \frac{1002^2 - 998^2}{8} = \frac{1\,004\,004 - 996\,004}{8}$$

$$\mu = E(x) = \frac{8000}{8} = 1000$$

$\mu = E(x) =$ 1000 ml **R//**

La varianza puede calcularse por:

V (x) = E (x^2) - E (x)^2

$$E(x)^2 = \int_{996}^{1004} x^2 \cdot \frac{1}{8}dx = \frac{1}{8}x^3]_{996}^{1004} = \frac{1004^3 - 996^3}{8} = 3\,000\,016$$

V(x) = 3 000 016 - 1 000 000

V(x) =2 000 016

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2\,000\,016}$ = 1414.22

$\sigma(x) = 1414.22$ **R//**

PR 3.3. En una planta potabilizadora de agua de un pueblo, la cantidad de equipos de potabilización fuera de servicio en un día, es una variable aleatoria, que tiene la siguiente Función de Probabilidad:

Equipos fuera de servicio	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	0.60	0.15	0.12	0.08	0.03	0.02

a) Defina la Función de Distribución Acumulada para esta variable.

Encuentre la probabilidad que:

a) Que haya 2 equipos o menos fuera de servicio en un día.

b) Que el número de equipos fuera de servicio en un día este entre 2 y 4.

c) Que haya más de 3 equipos fuera de servicio.

d) El Valor Esperado del número de equipos fuera de servicio.

e) Si la planta tiene 20 equipos, ¿cuál es el valor esperado de equipos funcionando?

f) La Varianza del número de equipos fuera de servicio.

Solución

a) La Función de Distribución Acumulada se define tomando como valores de t los que tiene la variable y sumando la Función de Probabilidad hasta cada valor de t. Por ejemplo:

$F_x(3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0.60+0.15+0.12+0.08=0.95$

Dando esos pasos se puede construir la siguiente tabla para la Función de Distribución Acumulada:

Equipos fuera de servicio (t)	0	1	2	3	4	5
$F_x(t)$	0.60	0.75	0.87	0.95	0.98	1.00

b) Este inciso puede resolverse utilizando directamente la Función De Distribución Acumulada, entonces:

$P(x \leq 2) = F_x(2) = 0.87$

También calculando esta probabilidad usando la Función de Probabilidad:

$P(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)=0.60+0.15+0.12 = 0.87$ R//

c) Se pide calcular $P(2 \leq x \leq 4)$, entonces usando la Función de Probabilidad:

$P(2 \leq x \leq 4) = f(2) + f(3) + f(4) = 0.12+0.08+0.03 =0.23$ R//

Hay que calcular:

$P(x \geq 3) = f(3) + f(4) + f(5)=0.08+0.03+0.02 = 0.13$ R//

También puede calcularse como:

$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - F_x(2) = 1 – 0.87 = 0.13$

d) El Valor Esperado puede calcularse por:

$$\mu = E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) = \sum_{0}^{5} x\, f(x)$$

$$\mu = E(x) = 0 * 0.60 + 1 * 0.15 + 2 * 0.12 + 3 * 0.08 + 4 * 0.03 + 5 * 0.02$$

$\mu = E(x) = 0.85\ equipos$ **R//**

O sea, aproximadamente hay un equipo fuera de servicio cada día.

e) Aplicando las propiedades vistas del Valor Esperado, si a es una constante:

E(a - x) = E(a) – E(x) = a – E(x)

Entonces:

E(20 – x) = 20 – E(x) = 20 – 0.85 = 19.15 equipos R//

Por tanto, habrá un Valor Esperado de aproximadamente 19 equipos trabajando.

f) Para calcular la Varianza se utiliza la expresión:

$V(x) = E(x^2) – E(x)^2$, entonces:

$$E(x^2) = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)$$

$$\sum_{x=0}^{5} x^2\, f(x) = 0^2 * 0.60 + 1^2 * 0.15 + 2^2 * 0.12 + 3^2 * 0.08 + 4^2 * 0.03 +$$

$$5^2 * 0.02 = 2.33$$

$V(x) = 2.33 – o.85^2 = 2.33 – 0.72 = 1.61$ **R//**

PR 3.4. La cantidad de un tipo de contaminante en las aguas superficiales de una zona industrial, en ppm, es aleatorio con la siguiente Función de Densidad probabilística:

$f(x) = 2x$ para $0 \leq x \leq 1$

a) Defina la Función de Distribución Acumulada para esta variable.

Calcule la probabilidad que:

b) Se encuentre menos de 0.5 ppm de este contaminante.

c) Más que 0.3 ppm.

d) Entre 0.3 y 0.5 ppm.

e) Encuentre el Valor Esperado de esta variable.

Solución

a) La Función de Distribución Acumulada es la solución de:

$$Fx(t) = P(x \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

$$Fx(t) = \int_{0}^{t} 2x dx = x^2 \Big|_0^t = t^2 =$$

$Fx(t)$= t^2 para $0 \leq t \leq 1$ **R//**

b) La probabilidad de encontrar menos de 0.5 ppm del contaminante, puede calcularse directamente utilizando la Función de Distribución Acumulada, esto es:

$$P(x \leq 0.5) = t^2 = 0.5^2 = 0.25$$

También puede calcularse usando la Función de Densidad Probabilistica:

$$P(x \leq 0.5) = \int_{0}^{0.5} 2x dx = x^2]_0^{0.5} = 0.5^2 = 0.25$$

$$P(x \leq 0.5) = \int_{0}^{0.5} 2x dx = x^2]_0^{0.5} = 0.5^2 = 0.25 \text{ R//}$$

c) Se pide calcular :

P(x≥3)= $\int_{0.3}^{1} 2x dx = x^2]_{0.3}^{1} = 1^2 - 0.3^2 = 0.91$ **R//**

d) Para este cálculo se emplea una vez más la Función de Densidad Probabilística :

P(0.3 ≤ x ≤ 0.5) = $\int_{0.3}^{0.5} 2x dx = x^2]_{0.3}^{0.5} = 0.5^2 - 0.3^2 = 0.16$

También se puede utilizar la Función de Distribución Acumulada :

$Fx(t)$= t^2 para $0 \leq t \leq 1$

$P(0.3 \leq x \leq 0.5) = Fx(0.5) - Fx(0.3) = 0.5^2 - 0.3^2 = 0.16$

e) $\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$ se plantea :

$E(x) = \int_0^1 [x \cdot 2x)\, dx] = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{2(1-0)}{3} = 0.66$

$E(x) = 0.66\ ppm$ **R//**

PR 3.5. La demanda semanal de un cierto tipo de lavadoraque se oferta en una tienda de electrodomésticos es aleatoria y tiene la siguiente Función de Probabilidad:

DEMANDA	1	3	5	7	9
PROBABILIDAD	0.2	0.2	0.4	0.1	0.1

a) Defina la Función de Distribución Acumulada para esta variable.

Encuentre la probabilidad que:

b) Que haya una demanda de 3 o más lavadoras en una semana.

c) Que la demanda sea entre 3 y 5 lavadoras.

d) Que haya una demanda de menos de 5 lavadoras.

e) El Valor Esperado o demanda media de lavadoras en una semana.

f) La Varianza del número de equipos fuera de servicio.

Solución

a) La Función de Distribución Acumulada (FDA) para esta variable es:

DEMANDA	1	3	5	7	9
$F_x(t)$	0.2	0.4	0.8	0.9	1.0

b) Se pide calcular $P(x \geq 3)$ donde x es la demanda semanal de ese tipo de lavadora. Entonces:

$P(x\geq3)=P(x=3) + P(x=5)+ P(x=7)+ P(x=9) = 0.2 +0.4 +0.1 +0.1 = 0.8$

$P(x\geq3) =0.08$ **R//**

c) Hay que calcular: $P(3 \leq x \leq 5)$.

P(3 ≤ x ≤ 5) = P(x=3) + P(x=5) sustituyendo los valores de la tabla de probabilidades:

$P(3 \le x \le 5) = P(x=3) + P(x=5) = 0.2 + 0.4 = 0.6$

$P(3 \le x \le 5) = 0.6$ **R//**

Si este inciso se quisiera responder utilizando la FDA, entonces:

$P(3 \le x \le 5) = F_x(5) - F_x(1) = 0.8 - 0.2 = 0.6$

Lo que coincide con la respuesta anterior.

d) Se pide calcular P(x<5).

Pero: $P(x<5) = P(x \le 3) = P(x=3) + P(x=1)$ por ser x una variable aleatoria discreta.

De la tabla:

$P(x<5) = P(x \le 3) = P(x=3) + P(x=1) = 0.2+0.2 = 0.4$

$P(x<5) = 0.4$ R//

Aplicando la FDA sería:

$P(x<5) = P(x \le 3)= F_x(3)$, y de la Tabla de FDA,

$P(x<5) = P(x \le 3)= F_x(3)= 0.4$

$F_x(3)= 0.4$ **R//**

e) El Valor esperado o media de la demanda de lavadoras puede calcularse por:

$$\mu = E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) = \sum_{1}^{9} x\, f(x)$$

$$\sum_{1}^{9} x\, f(x) = 1 * 0.2 + 3 * 0.2 + 5 * 0.4 + 7 * 0.1 + 9 * 0.1 = 0.2 + 0.6 + 2 + 0.7 + 0.9$$

Por tanto:

$\mu = E(x) = 4.4\ lavadorascadasemana$ **R//**

PR 3.6. Una empresa pesquera tiene dos barcos Alfa y Beta. En cada salida tienen un plan de captura de 60 toneladas el A y de 40 toneladas el B. La pesca real, en toneladas, es una cantidad aleatoria, que según información recopilada tienen las siguientes funciones de probabilidad para ambas embarcaciones.

BARCO A

Pesca real	48	56	64	70	Más de 70
Probabilidad	0.15	0.20	0.41	0.17	0.07

BARCO B

Pesca real	28	32	36	43	Más de 45
Probabilidad	0.12	0.18	0.28	0.34	0.08

Con la información anterior, calcule la probabilidad que:

a) El barco A incumpla el plan de captura.

b) El barco B cumpla el plan de captura.

c) Que ambos barcos cumplan el plan de captura. Asuma independencia entre la captura de ambos barcos.

d) Al menos uno de los barcos cumpla el plan de captura.

e) Valor medio de captura real para ambos barcos.

Solución

Se define como x_A y x_B las variables aleatorias cantidad de toneladas de captura real para el barco A y B respectivamente.

a) Se pide calcular $P(x_A \leq 60)$.

$P(x_A \leq 60) = P(x_A=48) + P(x_A=56) = 0.15 + 0.20 = 0.35$

$P(x_A \leq 60) = 0.35$ **R//**

b) Se pide calcular $P(x_B \geq 40)$.

$P(x_B \geq 40) = P(x_B=43) + P(x_B=\text{Más de } 45) = 0.34 + 0.08 = 0.42$

$P(x_B \geq 40) = 0.42$

Note que mientras el barco A tiene un 65% de posibilidades de cumplir el plan, en el caso del barco B este porciento se reduce a un 42%.

c) En este caso se pide la probabilidad de que ambos barcos cumplan su plan de captura, esto es que lo cumpla A y lo cumpla B y entonces hay que aplicar la Regla de la multiplicación vista en el Capítulo 2 para dos variables independientes. Esto es:

P(ambos cumplan plan) = $P(x_A \geq 60)*P(x_B \geq 40)$

$P(x_A \geq 60) = 1 - P(x_A \leq 60)$ por el complemento

$P(x_A \geq 60) = 1 – 0.35 = 0.65$

$P(x_B \geq 40) = 0.42$

Sustituyendo:

P(ambos cumplan plan) = $P(x_A \geq 60)*P(x_B \geq 40) = 0.65 * 0.42 = 0.2730$

P(ambos cumplan plan) = 0.2730 **R//**

Puede verse que esta probabilidad es relativamente pequeña.

d) Que al menos un barco cumpla el plan de captura implica que los cumpla A o B o ambos y hay que aplicar en este caso la Ley de la Suma, esto es:

P(al menos un barco cumpla el plan) = $P(x_A \geq 60) + P(x_B \geq 40) - P(x_A \geq 60)*P(x_B \geq 40)$

Sustituyendo los valores calculados anteriormente:

P(al menos un barco cumpla el plan) = 0.65 + 0.42 – 0.2730 = 0.7970

P(al menos un barco cumpla el plan) = 0.7970 **R//**

O sea, la probabilidad de que al menos uno cumpla el plan de captura es de casi un 80%

e) Se pide calcular el valor medio o esperado de la captura real para cada barco. Como el último intervalo es abierto, se tomará el valor menor. Entonces:

$$\mu_A = E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_A f_A(x) = 48*0.15 \quad +56*0.20 \quad +64*0.41 \quad +70*0.17$$

+71*0.07

$\mu_A = 61{,}51\ toneladas$ **R//**

$\mu_B = E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_B f_B(x) =$ 28*0.12 +32*0.18 +36*0.28 +43*0.34

+46*0.08

$\mu_B = 37.5\ toneladas$ **R//**

Note que el valor medio de captura real del barco A supera solo en 1,5 toneladas al plan y en el caso del barco B su valor medio está por debajo del plan de captura. Esto implica que esos planes deben revisarse para ajustarse a esta realidad.

3.10. Problemas propuestos de variables aleatorias

PP 3.1. La cantidad de tortas que vende una dulcería cada día es aleatoria, con la siguiente Función de Probabilidad.

Cantidad de tortas	6	7	8	9	10
Probabilidad	0.05	0.16	0.48	0.21	0.10

a) Halle la Función de Distribución Acumulada para esta variable.

Calcule la probabilidad que:

b) Se venda exactamente 8 tortas en un día.

c) Se venda 8 o menos tortas.

d) Se venda 9 o más tortas.

e) Se venda menos de 8 tortas.

f) Se venda entre 7 y 9 tortas.

g) Halle el valor medio o esterado de tortas que se vende diariamente en esta dulcería.

PP 3.2. Una empresa de transporte por ómnibus, ha realizado un estudio durante 300 salidas, para determinar la cantidad de asientos desocupados con la que sale el bus de la terminal cabecera. La información se brinda en la siguiente tabla:

No. de asientos desocupados	5	8	10	12	Más de 12
Cantidad de salidas	85	68	112	18	17

a) Encuentre la Función de Probabilidad y de Probabilidad Acumulada para esta variable aleatoria.

Calcule la probabilidad que:

b) El bus salga con 10 o más asientos desocupados.

c) Que salga con menos de 10 asientos desocupados.

d) Que a la salida haya entre 8 y 12 asientos desocupados.

e) Que salga exactamente con 10 asientos desocupados.

f) Si el bus tiene 45 asientos, ¿cuál es el valor medio de asientos llenos con que sale de la terminal?

PP 3.3. El tiempo de funcionamiento, en horas, de una turbina que se utiliza para evacuar aguas residuales, es aleatorio y tiene la siguiente Función de Densidad Probabilística:

$$f(x) = \frac{1}{300} \; para \; 150 \leq x \leq 450 \quad \text{Horas}$$

Calcule la probabilidad que:

a) La turbina funcione más de 300 horas.

b) Funcione entre 300 y 400 horas.

c) Funcione menos de 200 horas.

d) Encuentre la Función de Distribución Acumulada para esta variable aleatoria.

e) Encuentre el Valor Medio o Esperado para esta variable.

PP 3.4. Una empresa de Proyectos comunitarios debe desarrollar un nuevo proyecto. El tiempo estimado de duración, en días, es una variable aleatoria que tiene la siguiente Función de Densidad Probabilística:

$$f(x) = \frac{x}{8750} \quad \text{para } 150 \leq x \leq 200$$

Calcule la probabilidad que:

a) El tiempo de duración sea menos de 120 días.

b) Demore más de 180 días.

c) Demore menos de 160 días.

d) Demore entre 160 y 170 días.

e) Calcule el tiempo medio o esperado en la terminación del proyecto.

PP 3.5. La siguiente tabla muestra la Función de Distribución Acumulada para la demanda de filtros de agua en una tienda en un mes.

Demanda(t)	18	20	24	26	30
$F_x(t)$	0,12	0.34	0.48	0.74	1.00

Calcule la probabilidad que en un mes:

a) La demanda mensual sea menos o igual que 24 equipos.

b) La demanda mensual sea de 26 equipos o más.

c) La demanda sea igual a 20 equipos.

d) La demanda este entre 20 y 26 equipos.

e) Calcule el valor medio o esperado de este equipo en el mes.

f) Calcule la desviación típica o estándar de la demanda mensual de este equipo.

PP 3.6. El número de avionetas disponible para la fumigación que tiene una pequeña compañía cada día es una variable aleatoria con la siguiente Distribución de probabilidad:

Aviones disponibles	4	5	6	7	8
Probabilidad	0.06	0.30	0.45	0.10	0.07

a) Halle al Función de Distribución Acumulada para esta variable aleatoria.

Calcule la probabilidad que en un día:

a) La cantidad de avionetas disponibles sea de 6 o más.

b) Que haya menos de 6 avionetas disponibles.

c) Que haya entre 5 y 7 avionetas disponibles.

d) Calcule el valor medio o esperado de avionetas disponibles en un día.

PP 3.7. Un mueble metálico pasa por un proceso de control de calidad para detectar el número de defectos que tiene, que es una cantidad aleatoria con la siguiente Función de Probabilidad.

Número de defectos	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	0.78	0.08	0.05	0.04	0.03	0.02

Calcule la probabilidad que:

a) Que el número de defectos sea mayor que 3.

b) Que el número de defectos sea 2 o menos.

c) Que no tenga defectos.

d) Que el número de defectos esté entre 2 y 4.

e) Calcule el valor medio o esperado de defectos que se detectan y su desviación típica o estándar.

PP 3.8. La cantidad de clientes que compran en una tienda en un día es una variable aleatoria con la siguiente función de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{10} \qquad para\ x = 40,41,42, \dots 49$$

Calcule la probabilidad que:

a) Compren menos de 45 clientes.

b) Compren 47 o más clientes.

c) Compren exactamente 45 clientes.

d) Compren entre 44 y 48 clientes.

e) Calcule el valor medio o esterado de clientes que compran en esa tienda en un día.

PP 3.9. La cantidad de líquidos residuales en litros que genera una fábrica, es aleatoria y tiene la siguiente Función de Densidad Probabilística:

$$f(x) = \frac{1}{15} \qquad para\ 60 \leq x \leq 75\ L$$

a) Halle la Función de Distribución Acumulada para esta variable.

Calcule la probabilidad que:

b) Que la cantidad de líquidos residuales sea exactamente 65 L.

c) Que cantidad de líquidos residuales sea más de 70 L.

d) Que cantidad de líquidos residuales sea menos de 65 L.

e) Que cantidad de líquidos residuales este entre 65 y 70 L.

f) Calcule el valor medio o esterado de cantidad de líquidos residuales en un día.

PP 3.10. Una pequeña empresa lechera tiene dos fincas (M y N) que le suministran leche fresca. El compromiso de entrega de ambas fincas es de 2 000 litros diarios para la finca M y 3 000 litros para la finca N. Sin embargo, la cantidad real entregada es una cantidad aleatoria que tiene las siguientes funciones de probabilidad.

Cantidad real entregada finca M	1700	1900	2100	2300	2500
Probabilidad	0.05	0.25	0.25	0.30	0.15

Cantidad real entregada finca N	2600	2900	3200	3300	3500
Probabilidad	0.03	0.25	0.30	0.32	0.10

Con la información anterior, calcule la probabilidad que:

a) La finca M cumpla su plan de entrega diaria.

b) La finca N incumpla el plan de entrega diario.

c) Que ambas fincas cumplan en plan de entrega. Asuma independencia en la producción de las fincas.

d) Que al menos una de las fincas cumpla con la entrega de leche diaria.

e) Calcule el valor medio o esperado de la producción real diaria de leche de cada finca.

f) El valor medio de entrega de ambas fincas.

Capítulo IV. Distribuciones de probabilidad más usadas

4.1. Distribuciones de variables aleatorias discretas

En los experimentos estadísticos generalmente se parte de una muestra para caracterizar a una población bajo estudio. Muchos de estos datos, una vez procesados, se asemejan en su distribución probabilística a un conjunto de distribuciones teóricas cuyas Funciones de Distribución Probabilística se conocen y son sencillas de manipular. En este tema se estudiará primero las Distribuciones de variables aleatorias discretas y después las asociadas a variables aleatorias continuas.

Para el caso de variables aleatoria discretas, se estudiarán las siguientes distribuciones probabilísticas:

- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.
- DISTRIBUCIÓN POISSON.

Ambas distribuciones se presentan en muchos problemas de la administración y de la vida real. La principal ventaja radica en que una vez que se comprueba que se va a utilizar una de estas distribuciones, el cálculo de las probabilidades se simplifica notoriamente, ya que ambas están tabuladas para sus parámetros y aparecen en los paquetes informáticos de estadística.

4.1.1. Distribución binomial

La Distribución Binomial está asociada a una secuencia de fenómenos o experimentos aleatorios en que solo hay dos posibles resultados que se identifican como “éxito” y “no éxito”. Muchos problemas que se han estudiado hasta el momento, tienen esta característica. Por ejemplo:

- Las baterías de tratamiento de aguas residuales en una instalación turística que cada día tiene cada una la posibilidad de funcionar o estar rota.
- Se van a inspeccionar un número de fábricas en una provincia para analizar si cumplen las normas de protección medio ambientales y clasificarlas en cumplidoras y no cumplidoras.
- El estudio de un número de clientes que entran a un comercio y todos tienen dos opciones: comprar o no comprar.

- Un equipo deportivo que tiene pendientes un número de juegos y en cada uno de ellos solo dos posibilidades: ganar o perder.
- Un número de clientes que llega a un hotel en busca de alojamiento y cada uno tiene la posibilidad de reservar o no reservar.

Si se realizan n experimentos u observaciones independientes, en un fenómeno aleatorio donde en cada uno de ellos solo puede haber dos resultados (éxito o no éxito), con una probabilidad p de que ocurra un éxito y se define una variable x para identificar el número de éxitos en las n pruebas u observaciones, entonces la variable aleatoria x tiene una Distribución Binomial, con la siguiente Función de Probabilidad:

$$f(x) = {}_{n}C_{x}.p^{x}.(1-p)^{n-x}$$

Donde:

n: Número de pruebas u observaciones

x: Número de éxitos en las n pruebas. X=0, 1, 2, …, n

${}_{n}C_{x}$ es la fórmula de la Combinatoria, que se calcula como:

$$\frac{n!}{x!.(n-x)!}$$

p: probabilidad de que ocurra un éxito.

Los parámetros de la Distribución Binomial son n y p y existen tablas para distintos valores de estos parámetros. También los programas informáticos de estadística tienen esta Distribución, entre ellos el EXCEL.

La media o Valor Esperado de la Distribución Binomial es:

$E (x) = n.p$

La Varianza se puede calcular por:

$V (x) = n.p.(1-p)$

La distribución Binomial está tabulada para distintos valores de n y p y también puede hallarse utilizando cualquier paquete informático con funciones estadísticas, incluyendo el EXCEL.

Ejemplo 4.1. Se ha estimado que los contenedores recolectores de basura en un sector de una ciudad tienen una probabilidad de 0.08 de estar rotos.

Si se seleccionan 8 contenedores aleatoriamente de este sector, determine la probabilidad que:

a) No haya ninguno roto.

b) Haya 2 o menos rotos.

c) Haya 7 o más rotos.

Solución

Se define una variable aleatoria x como el número de contenedores que están rotos. En este caso x sigue una Distribución Binomial, ya que solo hay dos resultados para cada contenedor, roto o no roto y hay independencia entre las roturas de los contenedores.

Los datos para resolver el problema aplicando la Distribución Binomial son:

Número de pruebas n = 8

Si se asume como "éxito" que un contenedor esté roto, entonces esta probabilidad es p = 0.10

Con estos datos se puede resolver los incisos del problema.

a) Se pide calcular la probabilidad que ningún contenedor esté roto, esto es:

$P(x=0) = f(0)$ con $n=8$ y $p = 0.10$

$f(x) = {}_nC_x.p^x.(1-p)^{n-x}$

Sustituyendo los valores:

$f(0) = {}_8C_0{*}0.10^0 * 0.90^8 = \frac{8!}{0!.(8-0)!}{*}0.10^0 * 0.90^8 = 1 * 0.10^0 * 0.90^8 = 0.43$

$P(x=0) = f(0) = 0.43$ **R//**

b) Se pide calcular $P(x \leq 2)$, esto es:

$P(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

El primer término de la derecha ya fue calculado en el inciso anterior, entonces:

$f(1) = {}_8C_1{*}0.10^1 * 0.90^7 = \frac{8!}{1!.(8-1)!}{*}0.10^1 * 0.90^7 = 8 * 0.10^1 * 0.90^7 = 0.38$

$f(2) = {}_8C_2 * 0.10^2 * 0.90^6 = \frac{8!}{2!.(8-2)!} * 0.10^2 * 0.90^6 = 28 * 0.10^2 * 0.90^6 =$ 0.15

por tanto:

$P(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.43 + 0.38 + 0.15 = 0.96$

$P(x \leq 2) = 0.96$ **R//**

c) Haya 7 o más contenedores rotos. Entonces:

$P(x \geq 7) = f(7) + f(8)$

$f(7) = \frac{8!}{7!.(8-7)!} * 0.10^7 * 0.90^1 = 8 * 0.10^7 * 0.90^1 = 0.00$

$f(8) = \frac{8!}{8!.(8-8)!} * 0.10^8 * 0.90^0 = 1 * 0.10^8 * 0.90^0 = 0.00$

por tanto:

$P(x \geq 7) = f(7) + f(8) = 0.00$

$P(x \geq 7) = 0.00$ **R//**

Note que la probabilidad de que 7 o más contenedores estén rotos es prácticamente cero.

Ejemplo 4.2. Al final del proceso de envasado de café molido, se toma una muestra de tamaño 5 para comprobar si cumple las especificaciones del peso. Se conoce que la probabilidad de que un paquete no cumpla con el peso especificado es de 0.05. Calcule la probabilidad que:

a) Exactamente un paquete no cumpla las especificaciones del peso.

b) Que dos paquetes o menos no cumplan las especificaciones.

c)Que todos cumplan las especificaciones.

d) Valor esperado de paquetes que no cumplen con las especificaciones.

Solución

Si se define x como el número de paquetes de café que cumple con las especificaciones de peso, entonces esta variable cumple con las características para asumir que sigue una Distribución Binomial. Cada prueba solo tiene dos resultados: cumple o no cumple con las especificaciones. Los datos para resolver el problema aplicando la Distribución Binomial son:

n: Tamaño de la muestra. Para este caso n=5

Si se asume como éxito que el paquete no cumpla las especificaciones, entonces p= 0.05. Note que el éxito puede ser un evento negativo, como en este caso.

Con los parámetros de la distribución se pasa a resolver los incisos.

a) Se quiere calcular P(x=1), entonces:

$P(x=1)={}_5C_1.P^1.(1-p)^{5-1} = :\frac{5!}{1!.(5-1)!} *0.05^1*0.95^4= 5*0.05*0.81= 0.2062$

P(x=1)=0.2062 **R//**

b) Se pide calcular $P(x \leq 2)$. Entonces:

$P(x \leq 2)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)$

$P(x=0)= :\frac{5!}{0!.(5-0)!} *0.05^0*0.95^5 = 1*1*0.77= 0.77$

$P(x=2)=:\frac{5!}{2!.(5-2)!} *0.05^2*0.95^3 = 10*0.0025*0.86= 0.0215$

Realizando la suma:

$P(x \leq 2)= 0.77+0.20+0.0215 =0.9915$

$P(x \leq 2)= 0.9915$ **R//**

c) Que todos cumplan las especificaciones.

Para que todos cumplan las especificaciones, no puede haber paquetes que no cumplan las especificaciones de peso, por tanto el planteamiento de acuerdo a la definición de éxito que se ha seleccionado es:

P(x=0)= 0.77 **R//**

d) El Valor Esperado de la Distribución Binomial se definió como:

E (x) = n.p

E (x) = 5*0.05 = 0.25

E (x) = 0.25 **R//**

Esto es, en una muestra de tamaño 5, como media la mayoría de las veces no habrá paquetes que no cumplan las especificaciones.

4.1.2. Uso de las tablas de la distribución binomial para el cálculo de probabilidades

La Distribución Binomial se encuentra tabulada para distintos valores de n y p lo que permite calcular rápidamente las probabilidades asociadas a eventos con esta distribución. Una muestra de estas tablas se presenta en la Figura 9.

TABLA-T1: DISTRIBUCIÓN BINOMINAL

Probabilidades de la distribución binomial $(n; p)$

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n	x	$p = 0,1$	$p = 0,2$	$p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$
2	0	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	1	0,1800	0,3200	0,4200	0,4800	0,5000
	2	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500
3	0	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
	1	0,2430	0,3840	0,4410	0,4320	0,3750
	2	0,0270	0,0960	0,1890	0,2880	0,3750
	3	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250
4	0	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
	1	0,2916	0,4096	0,4116	0,3456	0,2500
	2	0,0486	0,1536	0,2646	0,3456	0,3750
	3	0,0036	0,0256	0,0756	0,1536	0,2500
	4	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625
5	0	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
	1	0,3280	0,4096	0,3602	0,2592	0,1562
	2	0,0729	0,2048	0,3087	0,3456	0,3125
	3	0,0081	0,0512	0,1323	0,2304	0,3125
	4	0,0005	0,0064	0,0284	0,0768	0,1562
	5	0,0000	0,0003	0,0024	0,0102	0,0312
6	0	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156
	1	0,3543	0,3932	0,3025	0,1866	0,0938
	2	0,0984	0,2458	0,3241	0,3110	0,2344
	3	0,0146	0,0819	0,1852	0,2765	0,3125
	4	0,0012	0,0154	0,0595	0,1382	0,2344
	5	0,0001	0,0015	0,0102	0,0369	0,0938
	6	0,0000	0,0001	0,0007	0,0041	0,0156

7	0	0,4783	0,2097	0,0824	0,0280	0,0078
	1	0,3720	0,3670	0,2471	0,1306	0,0547
	2	0,1240	0,2753	0,3176	0,2613	0,1641
	3	0,0230	0,1147	0,2269	0,2903	0,2734
	4	0,0026	0,0287	0,0972	0,1935	0,2734
	5	0,0002	0,0043	0,0250	0,0774	0,1641
	6	0,0000	0,0004	0,0036	0,0172	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0078

Figura 9. Tabla para la Distribución Binomial.

Ejemplo 4.3. Se resolverá el problema 4.2 pero asumiendo que la probabilidad de que un paquete de café no cumpla las especificaciones de peso es de 0.10. Utilizando las Tablas de la Distribución Binomial y en específico la que aparece en la Figura 9. Para este caso:

n=5

p= 0.10

a) P(x=1)=?

En la Tabla con n=5, p=0.10 y x=1 el valor de P(x=1)= 0.3280

b) Se solicita calcular P(x ≤ 2), pero:

P(x ≤ 2)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)

En la Tabla de la Distribución Binomial con los parámetros de este problema (n=5 y p= 0.10) se buscan las probabilidades de x=0, x=1 y x=2, esto es:

P(x=0) = 0.5905 P(x=1) = 0.3280 P(x=2) = 0.0729

Entonces:

P(x ≤ 2)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2) = 0.5905 + 0.3280 + 0.0729 = 0.9914

P(x ≤ 2)= 0.9914

c) Se solicita la probabilidad de que todos los paquetes de café cumplan con las especificaciones de peso, o lo que es lo mismo que ninguno incumpla las especificaciones, esto es P(x=0). Como ya está probabilidad se encontró en el inciso anterior, entonces:

P(x=0) = 0.5906

d) Supóngase que se quiere calcular la probabilidad de que haya 3 o más paquetes que no cumplan las especificaciones de peso, esto es, $P(x \geq 3)$

Esto podría hacerse por dos caminos:

$P(x \geq 3) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)$

Buscando en la Tabla los valores para cada término de la derecha de la ecuación anterior:

$P(x=3) = 0.0081$ $P(x=4) = 0.0005$ $P(x=5) = 0.0000$

$P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = 0.0086$

$P(x \geq 3) = 0.0086$

El otro camino, es utilizar el complemento, esto es:

$P(x \geq 3) = 1 – P(x \leq 2)$

Se ha calculado anteriormente que $P(x \leq 2)= 0.9914$, entonces:

$P(x \geq 3) = 1 – P(x \leq 2) = 1 – 0.9914 = 0.0086$

En algunos textos de estadística aparecen las tablas de la Distribución Binomial Acumulada y se trabaja de forma similar, pero aplicando lo estudiado en Funciones de Distribución Acumulada.

4.1.3. Uso del excel para el cálculo de probabilidades de la distribución binomial

Una forma más sencilla para calcular probabilidades con Distribución Binomial es utilizando el EXCEL. Dentro de las funciones estadísticas está la función DIST.BINOM que permite calcular de manera rápida tanto la probabilidad en un punto, como también la acumulada hasta un valor dado. Para ello debe abrirse una hoja EXCEL, marcar una celda y dentro de las funciones estadísticas seleccionar DIST.BINOM.N y se mostrara la venta que aparece en la Figura 10.

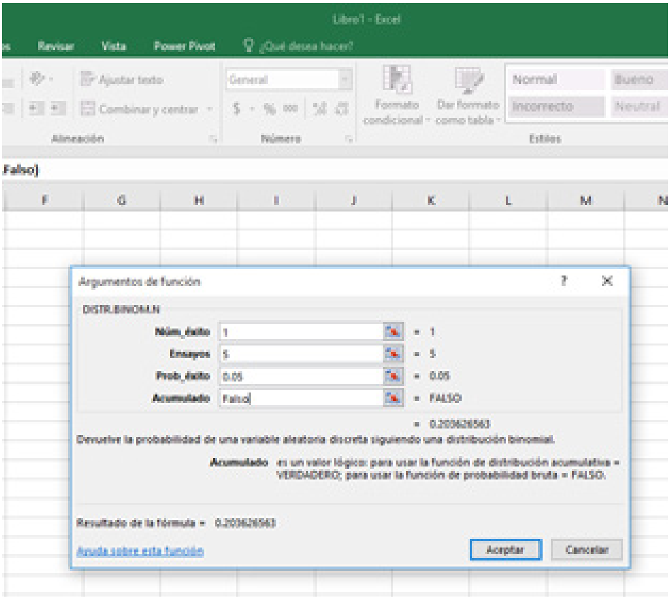


Figura 10. Ventana en el EXCEL para la Distribución Binomial.

Número de éxitos es el valor asociado a x, o sea el valor de x para el cual desea calcularse la probabilidad.

Número de ensayos es el valor de n o sea el número de pruebas u observaciones.

Probabilidad de éxito es el valor de p.

Finalmente, en la casilla de acumulado se pone Verdadero si se desea calcular la probabilidad acumulada hasta el valor de x o Falso si se desea calcular la probabilidad puntual, o sea que sea igual a x. Al completar los valores de los datos inmediatamente se muestra en la misma ventana, el valor de probabilidad deseado y al dar Aceptar ese valor aparece en la celda marcada.

Los datos también pueden entrarse poniéndolos en celdas de la Hoja EXCEL previamente.

Para ejemplificar se toman los datos del Ejemplo 4.8, esto es n=5, p=0.05. Como en el inciso a se pedía calcular P(x=1), el valor de x será 1 y en la última casilla se pone la palabra Falso, pues se desea la probabilidad puntual. En la Figura se muestra la ventana con todos los datos de este problema y se puede ver que la respuesta es similar al calculado manualmente.

Ejemplo 4.4. Utilizando el EXCEL, resuelva el Ejemplo 4.9 y calcule además la $P(1 \leq x \leq 3)$

Para este caso los datos son:

$p=0.10$

$n=5$

a) Calcular $P(x=1)$

En la ventana de DIST.BINOM.N se ponen los datos de este problema como aparece en la Figura11.

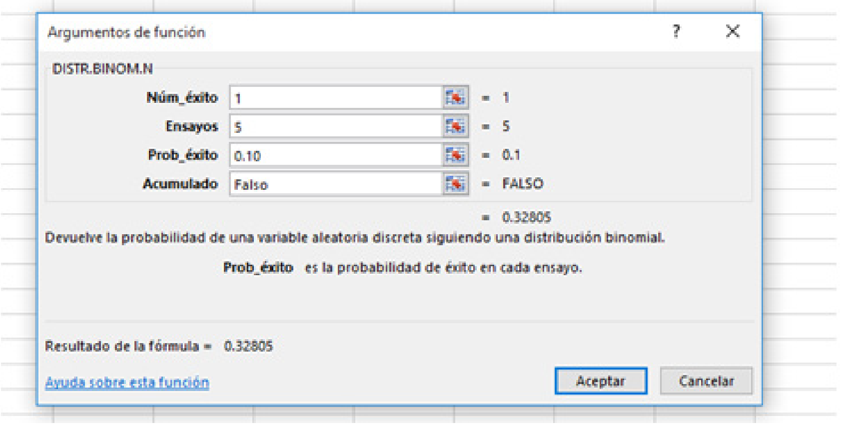


Figura 11. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para el ejemplo 3.10.

Puede observarse directamente en la ventana que $P(x=1) = 0.3280$

b) Calcular $P(x \leq 2)$. Usando la Función DIST.BINOM.N se mantiene igual el valor de n y p, en x se pone el valor de 2 y en la última celda de la ventana, como se desea la probabilidad acumulada hasta 2, se pone Verdadero. Esta información se muestra en la Figura 12.

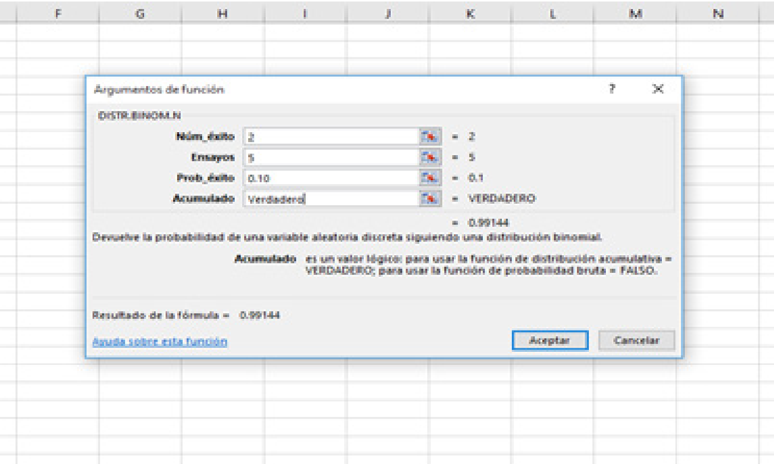


Figura 12. Ventana EXCEL Distribución Binomial ejemplo 3.10.

Puede verse directamente en la ventana el resultado que $P(x \leq 2) = 0.99144$

El inciso d solicita la $P(x \geq 3)$. Esto en el caso de utilizar el EXCEL resulta más sencillo utilizar el complemento, entonces:

$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - 0.99144 = 0.00856$

$P(x \geq 3) = 0.00856$

Para el caso del cálculo de la $P(1 \leq x \leq 3)$, pueden utilizarse dos vías: Calculando las 3 probabilidades puntuales y sumándolas, esto es:

$P(1 \leq x \leq 3) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$

En la misma ventana abierta para x=1, se cambia el valor de x=2 y x= 3 y aparecerán los 3 valores de la parte derecha de la igualdad.

La otra vía es utilizar:

$P(1 \leq x \leq 3) = P(x \leq 3) - P(x=0)$

En este caso como la variable es discreta y se incluye el valor de 1 en la desigualdad, hay que restar los valores por debajo de uno, que en este caso es el valor de cero para la variable. Utilizando la Función DIST.BINOM.N hay que usar los valores para una acumulada y para una puntual. Las ventanas se muestran en la Figura 13.

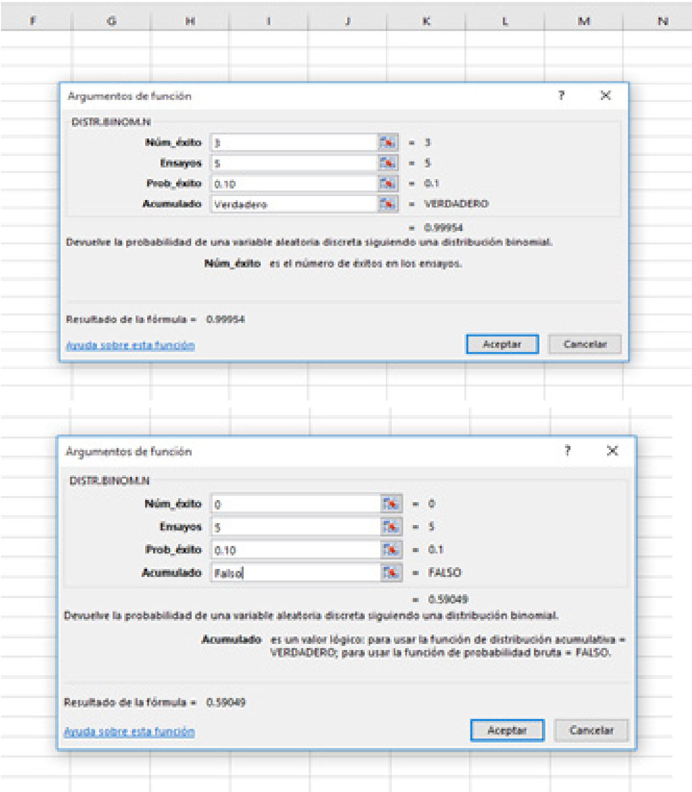


Figura 13. Ventana EXCEL Distribución Binomial ejemplo 3.10.

Donde $P(x \leq 3) = 0.99954$ y $P(x=0) = 0.59049$, por tanto:

$P(1 \leq x \leq 3) = P(x \leq 3) - P(x=0) = 0.99954 – 0.59049 = 0.40905$

$P(1 \leq x \leq 3) = 0.40905$

En los Problemas resueltos para variables discretas se continuará trabajando con el EXCEL para el cálculo de probabilidades de variables con Distribución Binomial

4.1.4. Distribución Poisson

Existen numerosos fenómenos aleatorios que se caracterizan por ocurrir un número de *"éxitos" en un intervalo de tiempo dado o en una región o volumen*. Algunos ejemplos son:

- Cantidad de arribos de autos en una hora a una gasolinera.
- Cantidad de errores mecanográficos en una hoja.
- Cantidad de partículas insolubles en un volumen dado de líquido.

Cuando el proceso es repetitivo se dice que se está en presencia de un Proceso Poisson que tiene las siguientes características:

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o región específica es independiente del número que ocurre en intervalos disjuntos. Se dice que el Proceso Poisson no tiene memoria.

   P (x = a / x = b) = P (x = a) x : Éxitos en el intervalo t.

2. En un intervalo de tiempo muy pequeño Δ t (o región ΔR) ,la probabilidad de ocurrencia de un resultado sencillo es proporcional al tamaño del intervalo y no depende de los resultados fuera de este intervalo

   P (x = 1) = λ (Δ t) : Razón media de ocurrencia de éxitos.

3. La probabilidad de ocurrencia de más de un éxito en este intervalo Δt es despreciable.

   P (x > 1 en Δ t) = 0

La Distribución Poisson, que permite calcular la probabilidad del número de “éxitos” que ocurren en un intervalo de tiempo o en una porción del espacio o de volumen, tiene la siguiente Función de Probabilidad:

$$f(x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$$

Donde:

x: Cantidad de “éxitos”.

λ : Parámetro de la Distribución Poisson. Media de “éxitos” en el intervalo de tiempo o porción de espacio o volumen que se desea estudiar.

e: Base de los logaritmos neperianos.

En ocasiones se conoce la razón de sucesos por unidad de tiempo θ, esto es usuarios/ hora, carros/día y entonces para encontrar el valor de λ para el tiempo t objeto de estudio, se calcula por $\lambda = \theta.t$. Por ejemplo, si se conoce la razón de arribos de los clientes a una cafetería y esta es de 60 clientes por hora y se quiere estudiar la probabilidad de que arriben 20 o más clientes en media hora, entonces:

Θ =60 clientes/hora; t= 0.5 hora

λ = θ.t = 60*0.5=30 clientes cada media hora

$P(x \geq 20) = \dfrac{30^{20}.e^{-30}}{20!} =$

La Media y la Varianza de esta Distribución viene dada por:

E(x) = V(x) = λ

Note que para esta distribución probabilística la media y la varianza tienen el mismo valor.

4.1.5. Uso de las tablas de la distribución Poisson para el cálculo de probabilidades

El cálculo de la probabilidad de un evento que siga una Distribución Poisson nunca se realiza a mano y para ello se utilizan las Tablas de esta distribución o un software estadístico como puede ser el EXCEL.

Una muestra de la Tabla Poisson se presenta en la Figura 14.

Para trabajar con las tablas de la Distribución Poisson, se entra con el valor de la media en las columnas y con el valor del número de éxitos que se quiere estudiar.

Ejemplo 4.5. Los clientes arriban a un taller de reparaciones automotriz aleatoriamente, siguiendo una Distribución Poisson con razón media de 15 usuarios por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que arriben 10 usuarios en 20 minutos?

b) Qué arriben más de 13 en ese intervalo de tiempo

c) Que arriben entre 10 y 12 autos.

Solución:

a) P(x =10) en 20 minutos =?

θ=30 usuarios/h

Se desea realizar el estudio en 20 minutos, por lo que la media de arribos en ese intervalo de tiempo es:

$\lambda = \theta.t$

t=20 min.=1/3 hora, entonces:

λ=15*1/3= 5 usuarios cada 20 minutos.

En la Figura 14 con λ= 5 y x = 10 se puede encontrar que:

P(x =10) = 0.0181

TABLA-T2 (Continuación)

Probabilidades de la distribución Poisson

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

x	$\lambda = 3,1$	$\lambda = 3,2$	$\lambda = 3,3$	$\lambda = 3,4$	$\lambda = 3,5$	$\lambda = 3,6$	$\lambda = 3,7$	$\lambda = 3,8$	$\lambda = 3,9$	$\lambda = 4,0$
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1733	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13					0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14										0,0001

x	$\lambda = 4,1$	$\lambda = 4,2$	$\lambda = 4,3$	$\lambda = 4,4$	$\lambda = 4,5$	$\lambda = 4,6$	$\lambda = 4,7$	$\lambda = 4,8$	$\lambda = 4,9$	$\lambda = 5,0$
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0281	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15					0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

Figura 14. Tabla para la Distribución Poisson.

b) Se pide calcular $P(x>13)$

Como la variable es discreta:

$P(x>13) = P(x \geq 14)$

En la Tabla de la Distribución Poisson:

$P(x \geq 14) = P(x=14) + P(x=15) = 0.0005 + 0.0002 = 0.0007$

$P(x \geq 14) = 0.0007$

c) Se pide calcular $P(10 \leq x \leq 12)$, entonces:

$P(10 \leq x \leq 12)= P(x=10) + P(x=11) + P(x=12)$

Buscando en la Tabla estos 3 valores:

$P(x=10)=0.0181$ $P(x=11)=0.0082$ $P(x=12)=0.0034$

Entonces:

$P(10 \leq x \leq 12)= P(x=10) + P(x=11) + P(x=12) = 0.0181 + 0.0082 + 0.0034 = 0.0297$

$P(10 \leq x \leq 12)= 0.0297$

4.1.6. Uso del excel para el cálculo de probabilidades de la distribución Poisson

El cálculo de probabilidades de la Distribución Poisson puede hacerse de forma sencilla utilizando las Funciones Estadísticas que tiene el EXCEL y específicamente la Función POISSON.DIST. Al seleccionar está función se abre una ventana en la Hoja EXCEL para introducir los datos, tal como se muestra en la Figura 15.

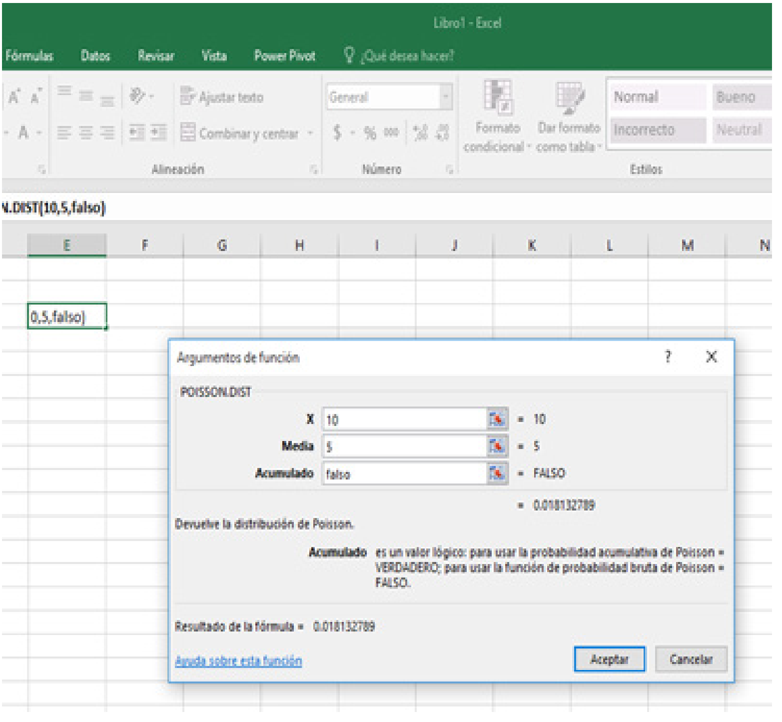


Figura 15. Ventana del EXCEL para la Distribución Poisson.

En la ventana se han introducido los mismos datos del Ejemplo 3.11, para calcular la probabilidad de que x= 10 en 20 minutos. Directamente aparece en la ventana el valor de esta probabilidad, o sea, P(x=10) = 0.0181, similar al encontrado en la Tabla.

Para calcular P(10≤x≤12) se usará la posibilidad de calcular las acumuladas que brinda esta función. Así:

P(10≤x≤12) = P(x≤12) - P(x≤9)

Como la variable x es discreta para que incluya el valor de x=10, habrá que restar la acumulada hasta el valor inmediato anterior, en este caso x=9.

Utilizando el EXCEL, primero se calcula P(x≤12), lo que se muestra en la Figura 16.

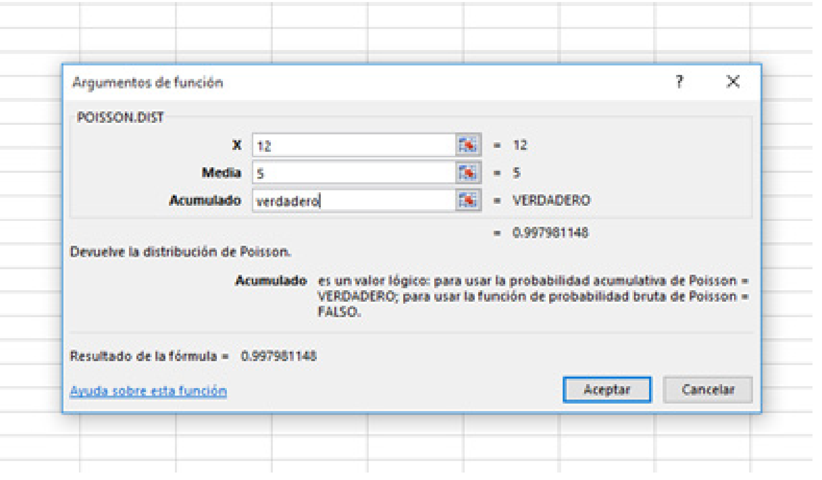


Figura 16. Ventana EXCEL de la Distribución Poisson para ejemplo 3.11.

Entonces la P(x≤12) = 0.9980. Cambiando el valor de x en la ventana a 9 se encuentra que la P(x≤9) = 0.9682, entonces:

P(10≤x≤12) = P(x≤12) - P(x≤9) = 0.9980 – 0.9681 = 0.0297

P(10≤x≤12) = 0.0297

Similar al valor calculado utilizando las probabilidades puntuales de la Tabla.

En los problemas resueltos se continuará practicando el uso del EXCEL para la Distribución Poisson.

4.1.7. Problemas resueltos de distribuciones discretas

PR 4.1. El gobierno de un municipio tiene 6 camiones recolectores de desechos sólidos para su servicio cada día. La probabilidad que un camión recolector este fuera de servicio en un día es de 0.20. Se puede asumir independencia entre el estado o situación de cada camión recolector de ese municipio. Determine la probabilidad que:

a) Haya exactamente dos camiones recolectores fuera de servicio en un día.

b) Haya menos de 2 camiones recolectores fuera de servicio en un día.

c) Todos los camiones recolectores estén funcionando en un día.

d) Haya como mínimo 4 camiones recolectores funcionando en un día.

e) Número medio de camiones recolectores que funcionan en un día.

Solución

En un día unos camiones recolectores de este municipio pueden estar en dos situaciones: funcionando o fuera de servicio y hay una probabilidad asociada a uno de estos dos estados. Por tanto, puede resolverse utilizando la Distribución Binomial

Sea x: número de camiones recolectores fuera de servicio en un día. Por los datos brindados esta variable tiene una probabilidad p = 0.20 y N = 6.

a) Se pide calcular P(x=2)

En la Tabla de la Figura 5 con n=6, p=0.20 y x= 2, P(x=2) = 0.2458

P(x=2) = 0.2458 R//

b) Se pide calcular P(x<2). Como la variable es discreta:

$P(x<2) = P(x\leq1)$

Como las Tablas tienen solo la probabilidad en un punto, hay que plantear:

$P(x\leq1) = P(x=0) + P(x=1)$

En la Tabla de la Figura 5 con N=6, p=0.20 y x=0, x=1, se tiene:

$P(x\leq1) = P(x=0) + P(x=1) = 0.2621 + 0.3932 = 0.6553$

$P(x<2) = P(x\leq1) = 0.6563$ **R//**

c) Se solicita calcular la probabilidad de que todos los camiones recolectores funcionen en un día, lo que es equivalente, en base a la variable definida, que no haya camiones recolectores fuera de servicio en un día, esto es P(x=0), el que ya fue calculado en el inciso anterior y por tanto:

Probabilidad de que todos los camiones recolectores funcionen en un día = P(x=0) = 0.2621 **R//**

d) Con un razonamiento similar al del inciso anterior, la probabilidad que haya al menos 4 camiones recolectores funcionando en un día es similar a que estén fuera de servicio 2 o menos camiones recolectores, esto es, a la $P(x \leq 2)$. Como las Tablas solo tienen las probabilidades en un punto:

$P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 0.2621 + 0.3932 + 0.2458 = 0.9011$

La probabilidad que haya al menos 4 camiones recolectores funcionando en un día es de 0.9011 **R//**

e) La media de la Distribución Binomial viene dada por: $E(x) = \mu = n.p.$

Por tanto, el número medio de camiones recolectores sin funcionar en un día es:

$E(x) = \mu = n.p = 6*0.20 = 1.2$ camiones recolectores

$E(x) = \mu = 1.2$ camiones recolectores **R//**

Se resolverán ahora los distintos incisos utilizando el EXCEL. Se pondrá la ventana para cada inciso con sus respectivos datos y la respuesta que aparece en la misma.

En el inciso a, se pide calcular $P(x=2)$ y utilizando el EXCEL se muestra la ventana en la Figura 17:

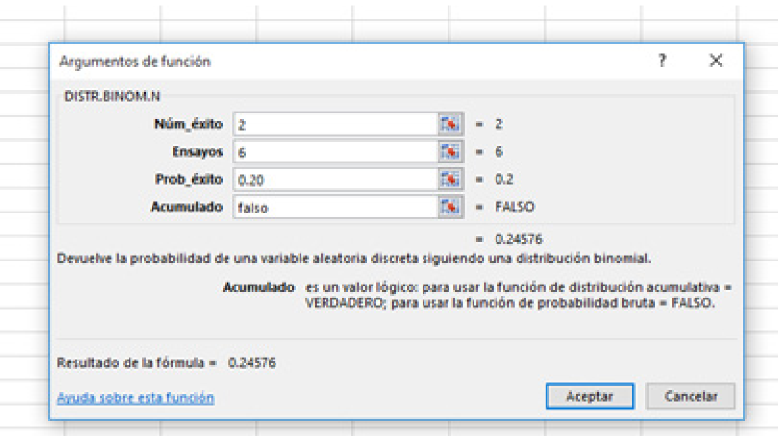


Figura 17. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso a PR 3.1.

En la misma ventana puede verse que $P(x=2) = 0.24576$ R//

b) Se pide calcular $P(x<2) = P(x \leq 1)$

Utilizando el EXCEL para hallar $P(x \leq 1)$, en la última celda se pondrá Verdadero, pues se desea el acumulado hasta el valor de x, en este caso 1. El resultado puede verse en la Figura 18.

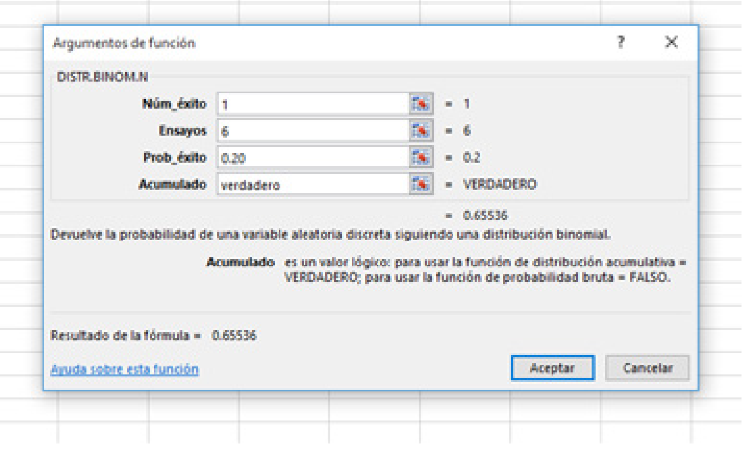


Figura 18. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso b PR 3.1.

c) Que todos los camiones recolectores funcionen en un día, equivalente a P(x=0), probabilidad puntual para x=0, aplicando el EXCEL, el resultado se muestra en la Figura 19.

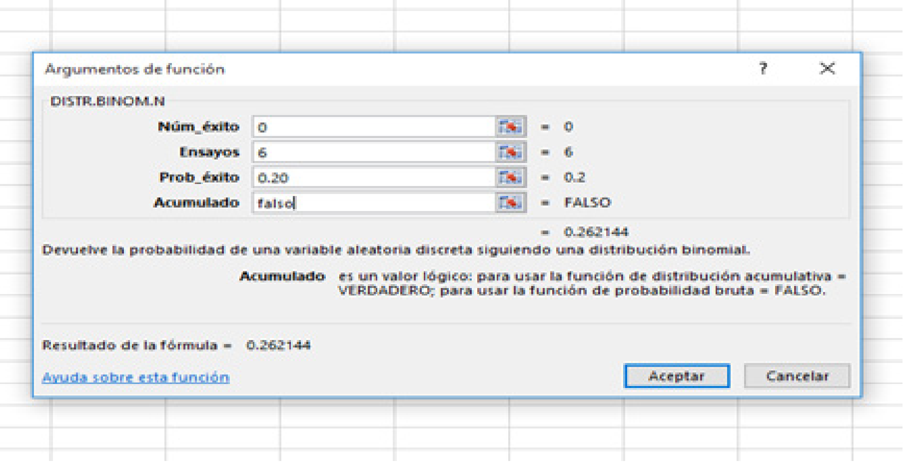


Figura 19. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso c PR 3.1.

Y se puede ver que P(x=0) = 0.262144 **R//**

d) La probabilidad que haya al menos 4 camiones recolectores funcionando en un día, se vió que es equivalente en base a la variable definida a plantear calcular P(x≤2).En la Figura 20 se muestra el resultado

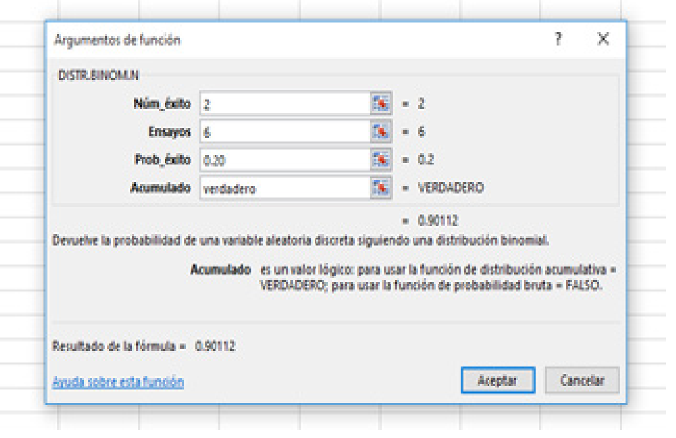


Figura 20. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso d PR 3.1.

Y en la ventana puede verse que: P(x≤2) = 0.90112 **R//**

PR 4.2. En un municipio se están desarrollando un gran número de proyectos de desarrollo local sustentable. Se sabe que la probabilidad de que un proyecto no logre alcanzar los objetivos propuestos es de 0.10, Cual es la probabilidad que:

a) Si se seleccionan 5proyectos, exactamente uno no alcance los objetivos.

b) Si se seleccionan 6 proyectos que no más de uno no alcance los objetivos propuestos.

c) Si se seleccionan 3 proyectos todos alcancen los objetivos propuestos.

d) Si se seleccionan 7 proyectos que al menos 5 alcance los objetivos propuestos.

Solución

Los proyectos en ejecución pueden estar en dos situaciones: alcanza los objetivos o no alcanza los objetivos. Existe una probabilidad p= 0.10 de que un proyecto no alcance los objetivos y se asumirá independencia entre la ejecución de estos proyectos. Por tanto, este problema cumple las características para poder aplicar la Distribución Binomial.

a) Se define la variable aleatoria x como el número de proyectos que no alcancen los objetivos. Piden calcular la $P(x=1)$. Los datos para este inciso son: $n= 5$, $p=0.10$.

En la Tabla de la Distribución Binomial que aparece en la Figura 5 con los datos y $x=1$ se puede encontrar que:

$P(x=1) = 0.3280$

La probabilidad de que de 5 proyectos haya exactamente un proyecto que no alcance los objetivos es de 0.3280 **R//**

b) Para este inciso se pide calcular $P(x \leq 1)$, cuando $n=6$.

Como en la Tabla de la Distribución Binomial solo se tiene la probabilidad puntual, entonces:

$P(x \leq 1) = P(x=0) + P(x=1)$

con $n=6$, $p= 0.10$ y $x= 0$ y 1 se puede encontrar que:

$P(x \leq 1) = P(x=0) + P(x=1) = 0.5314 + 0.3543 = 0.8857$

$P(x \leq 1) = 0.8857$

La probabilidad de que en 6 proyectos en ejecución, haya no más de unproyecto que no alcancen los objetivoses de 0.8857 **R//**

c) Se pide calcular que si se seleccionan 3 proyectos, todos cumplan los objetivos. Esto es equivalente a plantear que ninguno de los tres proyectos no alcance los objetivos, entonces, se pide calcular $P(x=0)$ para $n=3$, $p=0.10$ y buscando en la Tabla de la Distribución Binomial con $x=0$, se tiene:

$P(x=0) = 0.7290$

La probabilidad de que los 3 proyectos alcancen los objetivos es igual a 0.7290 **R//**

d) Similar razonamiento al realizado en el inciso anterior, nos lleva a deducir que la probabilidad que haya al menos 5 proyectos cumplan los objetivos en una muestra de 7 seleccionados en el municipio, es equivalente a plantear que haya 2 o menos proyectos que no alcancen los objetivos en dicha muestra, esto es:

Probabilidad que haya al menos 5 proyectos cumplan los objetivos = $P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

Buscando en la Tabla las probabilidades puntuales de la expresión anterior, con n=7 y p=0.10, se tiene que:

$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 0.4783 + 0.3720 + 0.1240 = 0.9743$

La probabilidad que haya al menos 5 proyectos que cumplan los objetivos en una muestra de seleccionados en el municipio es de 0.9743 **R//**

Aplicando el EXCEL a la solución de los 4 primeros incisos de este problema se tendrá:

a) Se pide calcular la $P(x=1)$. Los datos para este inciso son: n= 5, p=0.10. La ventana para la función DIST.BINOM.N se muestra en la Figura 21:

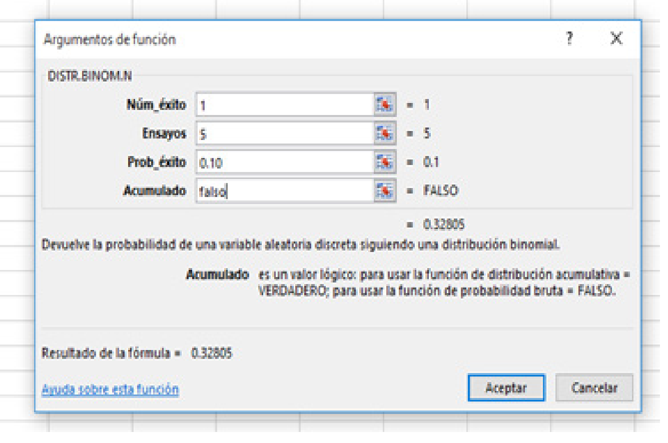


Figura 21. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso a PR 3.2.

Puede observarse en la misma ventana, que la probabilidad de que haya exactamente un proyecto que no alcancen los objetivosen una muestra de 5 es 0.32805. **R//**

b) Se pide calcular $P(x \leq 1)$, esto puede hallarse directamente en el EXCEL. Los datos son: n=6, p=0.10,x=1 y se pondrá verdadero en la última celda de la ventana, esto se muestra en la Figura 22.

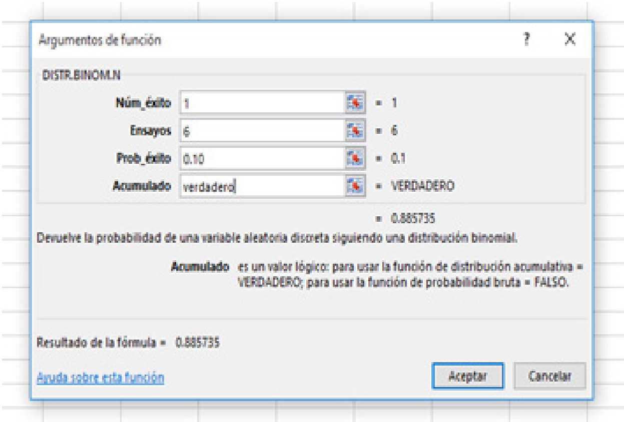


Figura 22. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso b PR 3.2.

Y la probabilidad que no haya más de un proyecto que no alcancen los objetivoses de 0.885735 **R//**

c) Se pide calcular que, si se seleccionan 3 proyectos del municipio, todos cumplan los objetivos. Aplicando el EXCEL esta probabilidad puede calcularse directamente cambiando la probabilidad de "éxito" p de que el TV sea bueno, esto es p= 0.90. En la Figura 23 se muestra la ventana de la Función DIST.BINOM.N para este caso.

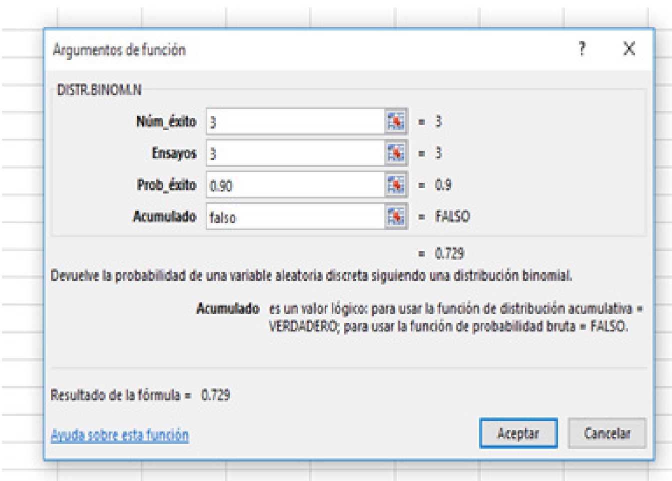


Figura 23. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso c PR 3.2.

Y la probabilidad de que, en una muestra de 3 proyectos, los tres cumplan los objetivos es de 0.729 **R//**

d) Se pide calcular la probabilidad que haya al menos 5 proyectos cumplan los objetivos en una muestra de 7 seleccionados en el municipio. Si se define la variable aleatoria x, como que el proyecto cumpla los objetivos, como se hizo en el inciso anterior, p=0.90 y se pide calcular P(x≥5). Pero el EXCEL no calcula valores mayores o igual, sino menor o igual, entonces hay que plantear:

$P(x \geq 5) = 1 - P(x \leq 4)$

Calculando el último término de la expresión anterior, utilizando el EXCEL se tendrá la ventana que se muestra en la Figura 24.

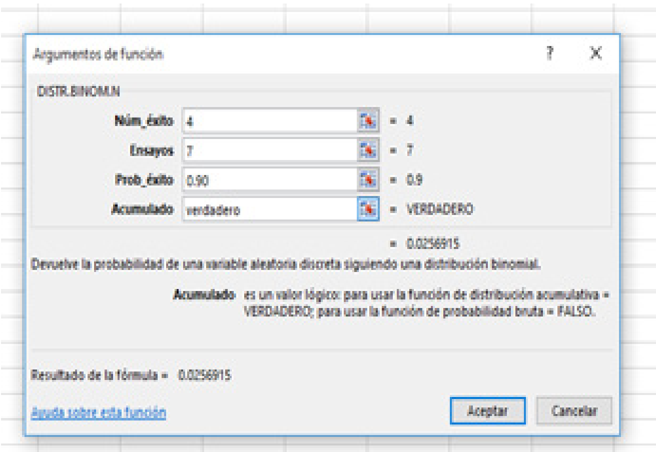


Figura 24. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso d PR 3.2.

Y entonces: $P(x \geq 5) = 1 - P(x \leq 4) = 1 - 0.0257 = 0.9743$

Esto es, la probabilidad de que en una muestra de 7 proyectos selecciona-dos en el municipio haya al menos 5 proyectos que alcancen los objetivo-ses 0.9743 **R//**

También puede resolverse como se hizo utilizando Tablas, pero el EXCEL calcula directamente el valor acumulado hasta x. Si se define x como el número de proyectos que no alcancen los objetivos, entonces p=0.10 y la probabilidad que al menos 5 proyectos que alcancen los objetivos es equivalente a que al menos 2 no lo alcancen, entonces:

Probabilidad que haya al menos proyectos que alcancen los objetivos= P(x≤2)

Y el último término de la expresión anterior puede calcularse directamente utilizando el EXCEL tal como se muestra en la Figura 25.

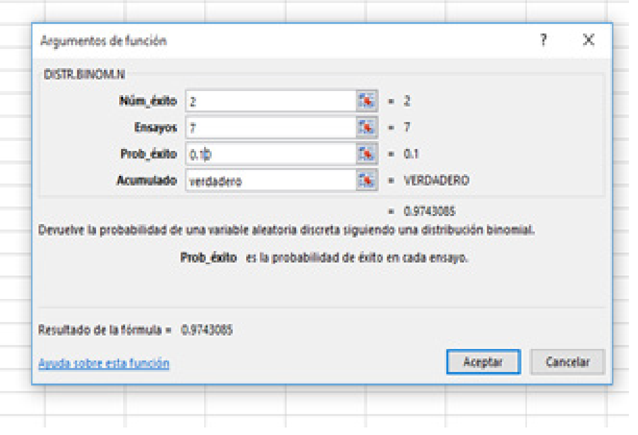


Figura 25. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso d PR 3.1.

Y el valor de la probabilidad, en este caso 0.9743085, es similar por ambos procedimientos.

PR 4.3. La probabilidad de que un cliente llegue a la carpeta de un hotel y encuentre habitación disponible es de 0.30. Si se puede asumir independencia entre el arribo de los turistas, calcule la probabilidad que:

a) Arriben 4 clientes y todos encuentren habitaciones disponibles.

b) Arriben 6 clientes y al menos 2 encuentren habitaciones disponibles.

c) Arriban 5 y entre 2 y 4 encuentran habitaciones disponibles.

d) Arriban 6 y exactamente la mitad encuentra habitaciones disponibles.

Solución

Sea x el número de turistas que arriban a la carpeta del hotel y encuentran habitaciones disponibles. Este problema por sus características cumple las condiciones para poder aplicar la Distribución Binomial a dicha variable.

a) Para este caso n=4 y p=0.30. Se pide calcular la probabilidad de que todos encuentren habitación disponible, o sea $P(x=4)$. Con estos datos buscando en la Tabla de la Distribución Binomial:

$P(x=4) = 0.0081$

Hay una probabilidad de 0.0081 que arriben 4 clientes al hotel y todos encuentren habitaciones disponibles. Se puede concluir que esta probabilidad es baja. **R//**

b) Se pide calcular si arriban 6 clientes al hotel que al menos 2 encuentren habitaciones disponibles. Esto es, para n=6 y p= 0.30, calcular $P(x \geq 2)$. Como la Tabla solo da las probabilidades en un punto, entonces:

$P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$

Utilizando el complemento:

$P(x \geq 2) = 1- P(x \leq 1) = 1 - P(x=0) - P(x=1)$ que es una vía más corta.

Entonces buscando en la Tabla de la Distribución Binomial esos valores puntuales se tiene que:

$P(x \geq 2) = 1- P(x \leq 1) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 1 – 0.1176 – 0.3025 = 0.5799$

La probabilidad que arriben 6 turistas al hotel y al menos 2 encuentre habitaciones disponibles es de 0.5799. **R//**

c) Para este caso n=5 y se pide calcular $P(2 \leq x \leq 4)$ cuando p= 0.30. Descomponiendo el intervalo en las probabilidades puntuales se tiene que:

$P(2 \leq x \leq 4) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)$

Buscando en la Tabla de la Distribución Exponencial estos valores:

$P(2 \leq x \leq 4) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = 0.3087 + 0.1323 + 0.0284 = 0.4694$

La probabilidad de que arriben 5 turistas y encuentren habitaciones disponibles entre 2 y 4 de ellos es 0. 4694 **R//**

d) Se pide calcular $P(x=3)$, para n=6 y p= 0.30. Buscando en la Tabla se encuentra directamente que:

$P(x=3) = 0.1852$

La probabilidad de que arriben 6 clientes al hotel y la mitad exactamente encuentre habitaciones es de 0.1852 **R//**

Aplicando el EXCEL en la solución del problema:

a) Se pide calcular P(x=4) con n=4 y p=0.30. En este caso hay que calcular una probabilidad puntual y se pone en la última celda de la ventana la palabra falso. Entonces la ventana de la Función DIST.BINOM.N para este caso es la que aparece en la Figura 26.

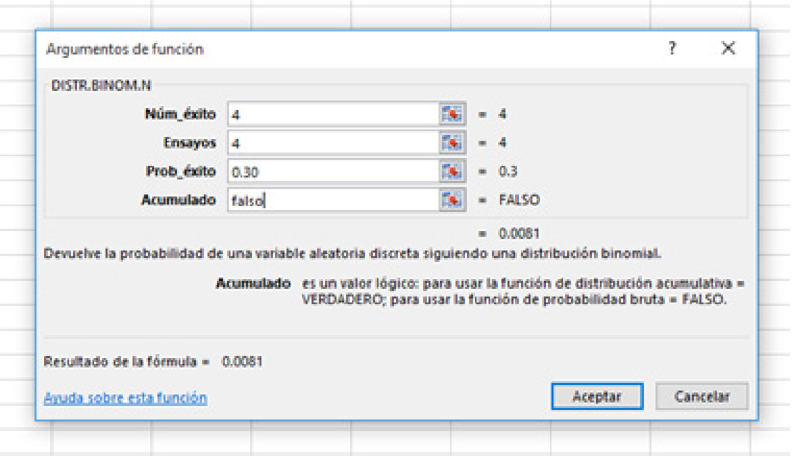


Figura 26. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso a PR 3.3

Se observa en la misma ventana que esta probabilidad es igual a 0.0081

Hay una probabilidad de 0.0081 que arriben 4 clientes al hotel y todos encuentren habitaciones disponibles. **R//**

b) Hay que calcularP(x≥2) para n=6 y p=0.30. La Función Binomial de EXCEL solo da la probabilidad puntual y acumulada hasta un valor de la variable, así que en este caso hay que aplicar el complemento, esto es: P(x≥2) = 1- P(x≤1)

Calculando el último término de la derecha de la igualdad anterior por el EXCEL se tiene la ventana que aparece en la Figura 27.

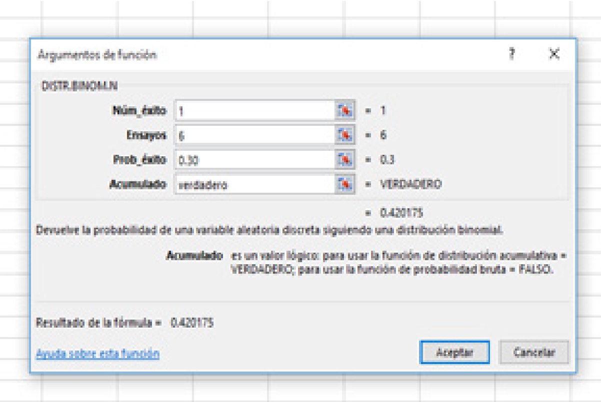


Figura 27. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso b PR 3.3.

Donde $P(x \leq 1) = 0.420175$ y entonces:

$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1) = 1 – 0.420175 = 0.579825$

La probabilidad que arriben 6 turistas al hotel y al menos 2 encuentre habitaciones disponibles es de 0.5798. **R//**

c) Se pide calcular $P(2 \leq x \leq 4)$ cuando n= 5 y p= 0.30. para aplicar el EXCEL es necesario hacer la siguiente transformación:

$P(2 \leq x \leq 4) = P(x \leq 4) - P(x \leq 1)$

Las ventanas para el cálculo de las probabilidades de la derecha utilizando el EXCEL se muestran en la Figura 28.

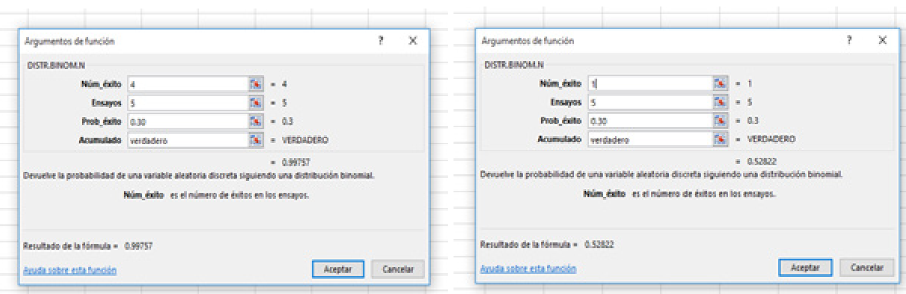


Figura 28. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso c PR 3.3.

Entonces:

$$P(2 \leq x \leq 4) = P(x \leq 4) - P(x \leq 1) = 0.99757 - 0.52822 = 0.46935$$

La probabilidad de que arriben 5 turistas y encuentren habitaciones disponibles entre 2 y 4 de ellos es 0. 46935 **R//**

d) Se pide calcular$P(x=3)$, para $n=6$ y $p= 0.30$. La ventana del EXCEL para calcular esta probabilidad se muestra en la Figura 29.

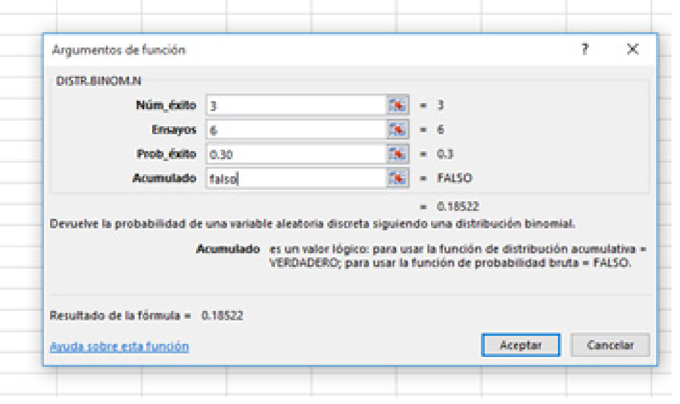


Figura 29. Ventana EXCEL de la Distribución Binomial para inciso d PR 3.3.

La probabilidad de que arriben 6 clientes al hotel y la mitad exactamente encuentre habitaciones es de 0.18522 **R//**

PR 4.4. En una tienda de equipos para purificar el agua, el cliente que entra tiene una probabilidad de 0.50 de comprar un artículo. Si en un día entraron 8 clientes a la tienda, cuál es la probabilidad que:

a) Exactamente la mitad hayan adquirido artículos.

b) No se haya vendido artículos.

c) No más de 3 hayan adquirido artículos.

d) Al menos 1 hayan adquirido un artículo.

e) Que entre 4 y 6 clientes hayan adquirido artículos.

Solución

Si se asume independencia en la entrada de los clientes, este problema puede resolverse utilizando la Distribución Binomial con parámetros p=0.50 y n=8.

a) Se solicita calcular $P(x=4)$. Buscando en las Tablas de la Distribución Binomial con n=8 y p=0.5, la $P(x=4)=0.2734$.

   $P(x=4)=0.2734$ **R//**

b) Se pide calcular $P(x=0)$. Buscando en las Tablas de la Distribución Binomial con n=8 y p=0.5, la $P(x=0)=0.0039$

   $P(x=0)=0.0039$ **R//**

c) No más de 3 es similar a que 3 o menos compren productos. Hay que calcular $P(x\leq 3)$. Como en las Tablas dadas solo aparecen los valores de las probabilidades en un punto, habría que calcular:

   $P(x\leq 3)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)+ P(x=3)$

Buscando en las Tablas de la Distribución Binomial con n=8 y p=0.5, estos valores puntuales, entonces:

   $P(x\leq 3)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)+ P(x=3)=0.0039+0.0312+0.1094+0.2188 =0.3633$

   $P(x\leq 3)=0.3633$ **R//**

d) Se debe calcular la $P(x\geq 1)$. Utilizando la propiedad del complemento:

   $P(x\geq 1)= 1- P(x<1) = 1 – P(x=0) = 1 – 0.0039 = 0.9961$

   $P(x\geq 1)= 1- P(x<1) = 0.9961$ **R//**

e) Hay que calcular la probabilidad en un intervalo, o sea $P(4\leq x\leq 6)$. Como en la Tabla solo aparecen los valores puntuales, entonces hay que plantear:

   $P(4\leq x\leq 6) = P(x=4)+ P(x=5)+ P(x=6)$

   Buscando en la tabla para n=8 y p=0.50 esos valores de x, se tiene:

   $P(4\leq x\leq 6) = P(x=4)+ P(x=5)+ P(x=6)= 0.2734+0.2188+0.1094=0.6016$

   $P(4\leq x\leq 6) =0.6016$ **R//**

Para resolver este problema usando el Excel, se utiliza la función DISTR. BINOM.N

Para el inciso a, la ventana con los valores de n,p,x y como se desea una probabilidad puntual se pone falso, se muestra en la Figura 30.

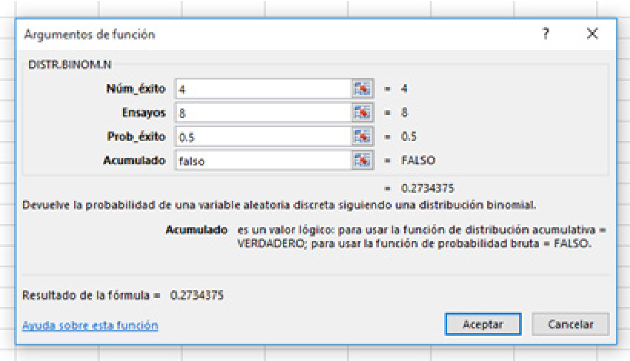


Figura 30. Ventana Excel para PR 3.4 inciso a.

Y puede observarse directamente el valor de$P(x=4)=0.2734$.

Para el inciso b se trabaja de forma similar, pero en este caso $x=0$. La tabla excel se muestra en la Figura 31.

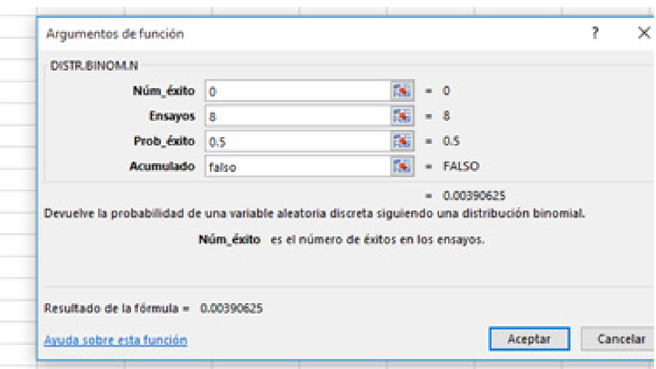


Figura 31. Ventana Excel para PR 3.4 inciso b.

Y el valor de$P(x=0)=0.0039$.

Para resolver el inciso c y usando el razonamiento anterior cuando se resolvió utilizando las Tablas, lo que se desea calcular es $P(x \leq 3)$ para $n=8$ y $p= 0.5$. En la ventana Excel para la Distribución Binomial se pone $x=3$ y como desea hallarse la acumulada hasta este valor en el valor lógico se pone verdadero. Esto se muestra en la Figura 32.

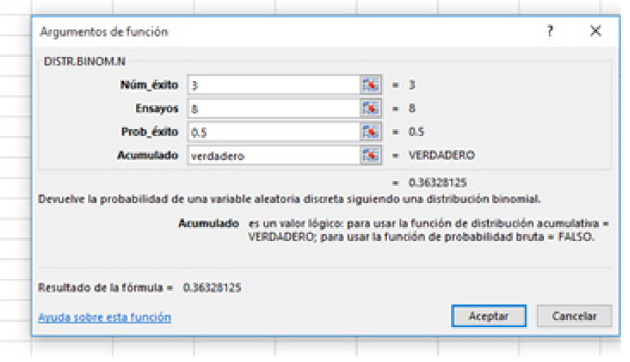


Figura 32. Ventana Excel para PR 3.4 inciso c.

Puede observarse que $P(x \leq 3) = 0.3633$

Por último, para resolver el inciso e utilizando el Excel, se puede resolver determinado los valores de las probabilidades puntuales para x=4, 5 y 6 y sumarlas, como se hizo anteriormente.

Otra forma es utilizando las distribuciones acumuladas, así:

$P(4 \leq x \leq 6) = P(x \leq 6) - P(x \leq 3)$, ya que la distribución es discreta y se quiere incluir el valor de $P(x=4)$. Utilizando el Excel, hay que calcular dos probabilidades acumuladas y restarlas. Esto se muestra en la Figura 33.

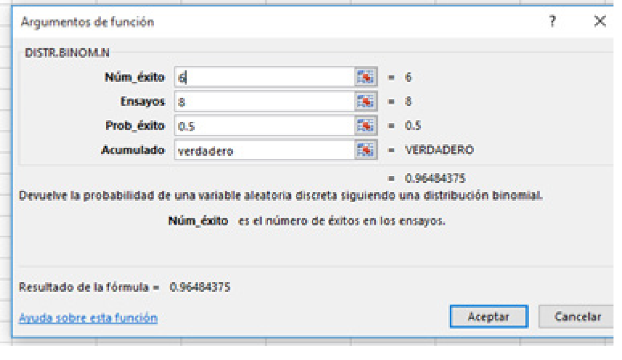


Figura 33. Cálculo en Excel de dos probabilidades.

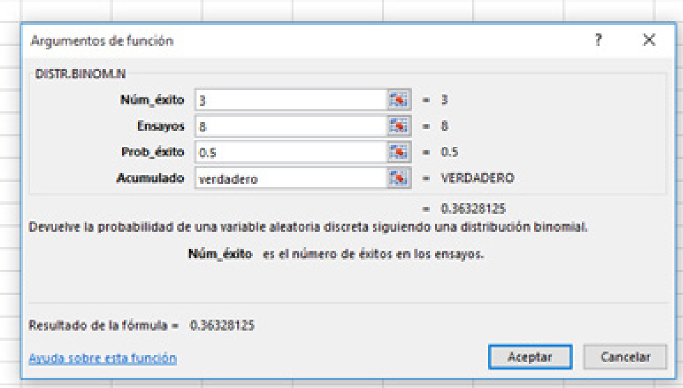


Figura 34. Ventana Excel para PR 3.4 inciso e.

Y finalmente:

$P(4 \leq x \leq 6) = P(x \leq 6) - P(x \leq 3) = 0.9648 - 0.3633 = 0.6015$

Similar al calculado utilizando las probabilidades puntuales.

PR 4.5. En una competencia conocimientos de educación ambiental, la probabilidad de que un participante falle una pregunta es de 0.10. Si se realizan 5 preguntas, determine la probabilidad que:

a) Conteste exactamente 3 preguntas correctamente.

b) Conteste bien 4 preguntas o más.

c) Que todas las preguntas sean contestadas correctamente.

d) Que conteste bien 3 preguntas o menos.

e) Que al menos dos preguntas sean bien contestadas.

f) Que el número de blancos este entre 3 y 5.

SOLUCIÓN

Este problema puede tener solo 2 resultados: contestar bien o mal una pregunta. Asumiendo independencia entre las respuestas a las preguntas, entonces puede resolverse utilizando la Distribución Binomial con n=5 y probabilidad contestar mal de p=0.10.

Note, sin embargo, que las probabilidades que se piden calcular en los distintos incisos están asociadas a contestar bien, que sería de 0.90, pero las tablas dadas de la Binomial solo llegan a $p=0.5$. Por tanto, cada pregunta habrá que transformarla a "no contestar bien" y la variable entonces es:

X: Número de preguntas mal contestadas.

a) Se pide calcular la probabilidad de contestar bien exactamente 3 preguntas de las 5 que se realizan, por lo que para cumplirse debe fallar exactamente en 2 preguntas. Entonces para $n=5$, $p=0.10$, probabilidad de contestar mal, x sería igual a 2. Por tanto, buscando para esos parámetros $P(x=2)$ en la Tabla de la Distribución Binomial se obtiene:

$P(x=2)=0.0729$ **R//**

b) Contestar bien 4 preguntas o más (4 ó 5) es similar a plantear que conteste mal 0 ó 1 pregunta, o sea hay que calcular $P(x\leq 1)$ con $n=5$ y $p= 0.1$. Pero como las tablas solo dan la probabilidad puntual, entonces:

$P(x\leq 1)= P(x=0)+ P(x=1)= 0.5905+0.3280=0.9185$

$P(x\leq 1)= 0.9185$**R//**

c) Que todas las preguntas sean contestadas bien, es similar a que ninguna se conteste mal, esto es, hay que calcular $P(x=0)$, donde x es el número de respuestas mal, para $n=5$ y $p=0.1$. Ya en el inciso anterior este valor fue encontrado en las Tablas y así:

$P(x=0) = 0.5900$ **R//**

d) Que responda bien 3 preguntas o menos (0, 1, 2 ó 3) es similar a que conteste mal 2 o más preguntas (5 ,4 ,3 ,2), o sea si x es el número de preguntas mal contestadas, entonces hay que calcular:

$P(x\geq 2) = P(x=2)+ P(x=3)+ P(x=4)+ P(x=5)$

$P(x\geq 2) = P(x=2)+ P(x=3)+ P(x=4)+ P(x=5) = 0.0729+0.0081+0.0005+0.0000$

$P(x\geq 2) = 00815$ **R//**

Otra forma de resolver este inciso es aplicando el concepto de complemento. Entonces:

$P(x\geq 2)= 1- P(x\leq 1) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 1 -0.5905 - 0.3280= 0.0815$

$P(x\geq 2) = 0.0815$

e) Que al menos 2 preguntas sean bien contestadas (2,3,4 ó 5), es similar que se falle en tres preguntas o menos (3,2,1,0). Por tanto, si x es el número de preguntas mal contestadas, hay que calcular:

$P(x \le 3)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2) + P(x=3)$

Y ya estos valores fueron encontrados en los incisos anteriores, por tanto:

$P(x \le 3) = P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2) + P(x=3)$

$P(x \le 3)=0.5905+0.3280\ 0.0729+0.0081 = 0.9995$

$P(x \le 3) = 0.9995$ **R//**

f) Como se contestan 5 preguntas, la probabilidad de que el número de preguntas bien contestadas esté en el intervalo de 3 a 5 (3,4 ó 5), es similar a plantear que se responda mal 2 veces o menos (2,1 ,0). Esto es, utilizando la variable preguntas mal contestadas, entonces hay que calcular:

$P(x \le 2) = P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)$

Cuyos valores de las probabilidades puntuales, ya fueron encontrados en los incisos anteriores. Por tanto:

$P(x \le 2) = P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)= 0.5905+0.3280+0.0729= 0.9914$

$P(x \le 2) = 0.9914$ **R//**

Se resolverá el problema ahora utilizando el Excel. Una de las ventajas del Excel es que no tiene límites para el valor de p, por lo que se podrá trabajar directamente con la variable contestar bien, cuya probabilidad asociada es de 0.9

Para el inciso a, se pide calcular exactamente la probabilidad que 3 preguntas sean bien contestadas. Sea x el número preguntas bien contestadas, entonces hay que calcular con n=5 y p= 0.9.

Se colocan estos datos en la ventana de la Función Excel DISTRBINOM.N y con la etiqueta lógica de falso, pues se desea calcular la probabilidad puntual, se mostrará directamente el resultado, tal como se muestra en la Figura 35.

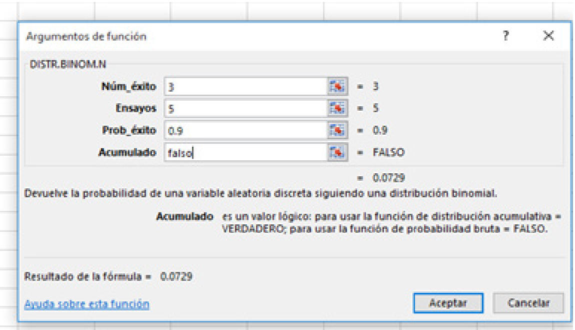


Figura 35. Ventana Excel para Problema Resuelto 4.5 inciso a.

Entonces:

P(x=3)= 0.0729, tal como fue calculado anteriormente utilizando las Tablas.

En el inciso b se pide calcular P(x≥4), o sea que al menos 4 preguntas sean bien contestadas. Como el Excel da el valor de la distribución acumulada, hay que plantear, utilizando la propiedad del complemento que:

P(x≥4)= 1 - P(x≤3)

Entonces el último término se calcula utilizando el Excel tal como se muestra en la Figura 36.

Puede observarse en la Figura que el valor de P(x≤3) = 0.0815, entonces

P(x≥4)= 1 - P(x≤3) = 1 – 0.0815 = 0.9185, tal como se calculó utilizando las Tablas.

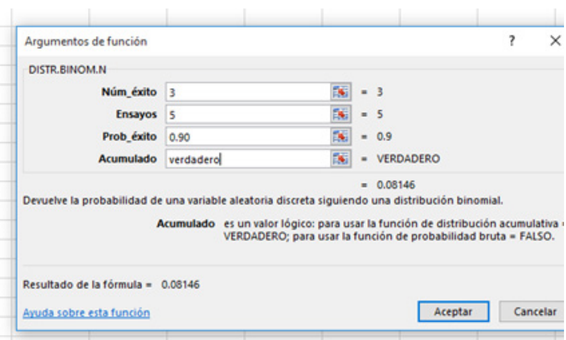


Figura 36. Ventana de la Distribución Binomial en Excel para PP 3.5 inciso b.

El inciso c puede resolverse por el Excel de forma similar a lo explicado para el inciso a.

Para resolver el inciso d, 3 o menos preguntas sean bien contestadas, utilizando el Excel con la probabilidad asociada a que preguntas sean bien contestadas (0.9), el planteamiento es halla r$P(x \leq 3)$, la cual se mostró en la Figura 36.

$P(x \leq 3) = 0.0185$ **R//**

Para la solución del inciso e utilizando el Excel, se emplea el concepto de complemento, así:

$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1)$

Y entonces el último término de la derecha de la ecuación se calcula con el Excel. Esto se muestra en la Figura 37.

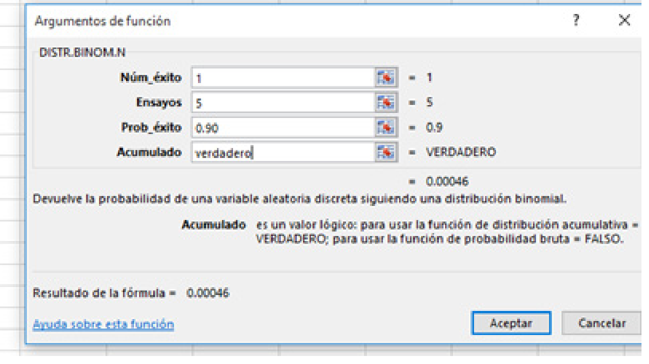


Figura 37. Ventana de la Distribución Binomial en Excel para PP 3.5 inciso e.

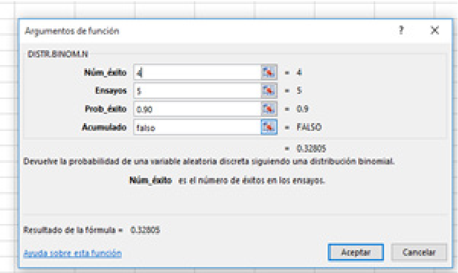
Y el valor de $P(x \leq 1) = 0.00046$ y por tanto:

$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - 0.00046$

$P(x \geq 2) = 0.9995$ **R//**

En el inciso f se pide calcular $P(3 \leq x \leq 5)$ y utilizando el Excel hay que calcular las probabilidades puntuales para x=3,4 y 5.

Ya el valor de $P(x=3)$ fue calculado utilizando el Excel y con el mismo procedimiento se calcula para x=4 y 5. Esto se muestra en la Figura 38.



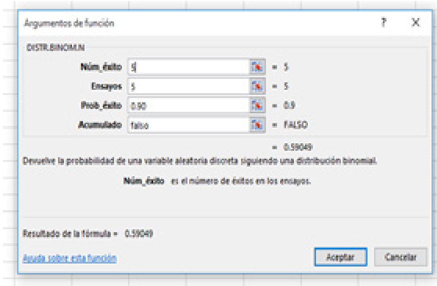


Figura 38. Ventana de la Distribución Binomial en Excel para PP 3.5 inciso f.

Y con los valores encontrados, sustituyendo:

$P(3 \le x \le 5) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = 0.0729 + 0.3280 + 0.5905 = 0.9914$

$P(3 \le x \le 5) = 0.9914$ **R//**

PR 4.6. Las interrupciones en el funcionamiento de una planta de tratamiento de residuales líquidos en una empresa, es aleatorio con un Distribución Poisson con media de 3 interrupciones cada mes. Calcule la probabilidad que:

a) Haya exactamente 2 interrupciones en un mes.

b) Haya no más de 2 interrupciones.

c) Haya 3 interrupciones o más.

d) Haya una interrupción en 10 días del mes.

SOLUCIÓN

Este problema sigue una Distribución Poisson con media de $\lambda=3$ interrupciones por mes y x se define como el número de interrupciones de la planta.

a) Se pide calcular $P(x=2)$. Buscando en las Tablas de la Distribución Poisson con $\lambda=3$ y $x=2$ se tiene que:

$P(x=2)=0.2240$

$P(x=2)=0.2240$ **R//**

b) Se pide calcular $P(x \leq 2)$ y como las Tablas solo dan la probabilidad puntual, entonces:

$P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 0.0498 + 0.1494 + 0.2240 = 0.4232$

$P(x \leq 2) = 0.4232$ **R//**

c) Se pide calcular$P(x \geq 3)$. Como ya se tiene el valor de$P(x \leq 2)$, aplicando el concepto de complemento, se tiene que:

$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2)$, sustituyendo el valor del último término calculado en el inciso anterior:

$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2)$

$P(x \geq 3) = 1 - 0.4232 = 0.5768$

$P(x \geq 3) = 0.5768$ **R//**

d) Se pide calcular la $P(x=1)$ pero en 10 días, lo que equivale a recalcular el valor de λ para ese período de tiempo. Entonces, como 10 días equivale a 1/3 de mes:

$\lambda(10 \text{ días}) = 1/3 * 3 = 1$

O sea, la media de interrupciones en 10 días es de $\lambda=1$. Buscando en las Tablas de la Distribución Poisson para $\lambda=1$ y $x=1$, se tiene que:

$P(x=1) = 0.3679$ **R//**

Utilizando el Excel para la solución de este problema, hay que seleccionar, dentro de las funciones estadísticas, la función POISSON.DIST.

En el inciso a se pide calcular $P(x=2)$. En la Figura 39 se muestra como serán los datos utilizando el Excel. Como la probabilidad es puntual en el valor lógico se pone falso.

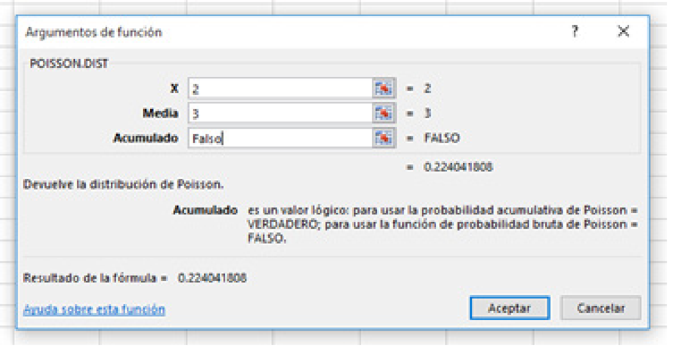


Figura 39. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PP 4.7 inciso a.

Y entonces:

P(x=2) = 0.2240 **R//**

En el inciso b hay que calcular P(x≤2), la cual es una probabilidad acumulada. En la ventana del Excel para la Función Poisson se mantiene el número de éxitos como 2 y la media como 3, pero como se desea la acumulada, el valor lógico será verdadero. Esto se muestra en la Figura 40.

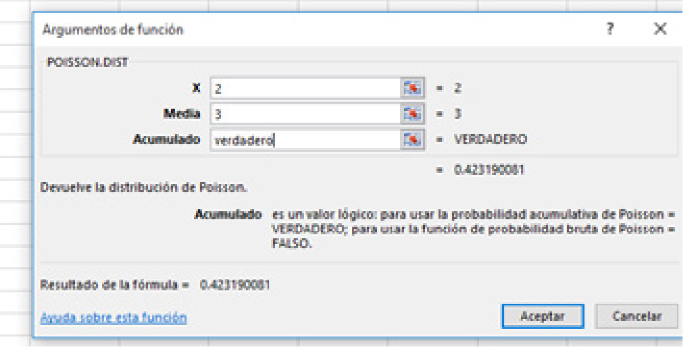


Figura 40. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PP 4.7 inciso b.

Y directamente puede verse que laP(x≤2) = 0.4232, esto es:

P(x≤2) = 0.4232 **R//**

En el inciso chay que calcularP(x≥3), pero en la Función Poisson del Excel solo aparecen las probabilidades puntuales o acumuladas hasta un punto, por lo que habrá que utilizar el complemento y entonces:

$P(x \geq 3)=1 - P(x \leq 2)$

Como ya $P(x \leq 2)$ fue calculada en el inciso anterior, entonces:

$P(x \geq 3)=1 - 0.4232=0.5768$

$P(x \geq 3)= 0.5768$ **R//**

En el inciso d, se pide calcular la $P(x=1)$ pero en 10 días. Como se vio anteriormente, entonces la media de la Distribución Poisson para este caso es de $\lambda=1$

Como la probabilidad a calcular es puntual, los datos para calcular la probabilidad solicitada, utilizando el Excel, se muestra en la Figura 41.

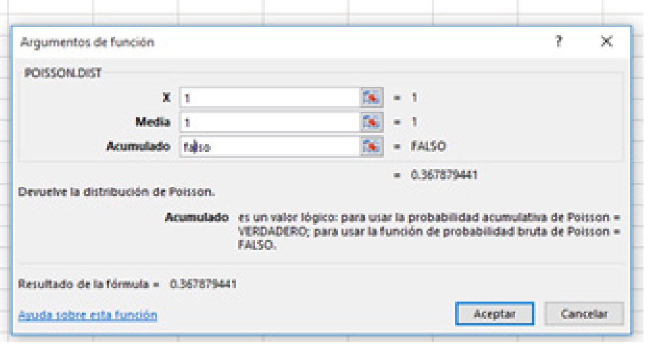


Figura 41. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PP 4.7 inciso d.

Y puede leerse directamente:

$P(x=1) = 0.3679$ **R//**

PR 4.7. La cantidad de errores que aparecen en un modelo de solicitud de licencia ambiental es aleatoria y sigue una Distribución Poisson con media de 4 errores por modelo. Con esta información calcule la probabilidad que:

a) No haya errores en un modelo.

b) Haya 3 errores o menos.

c) Haya más de 5 errores.

d) El número de errores este entre 2 y 4.

SOLUCIÓN

El número de errores en un modelo sigue una Distribución Poisson con media de 4 errores. Para este problema, λ= 4 y x el número de errores en un modelo.

a) Se pide calcular P(x=0), o sea que no haya errores en un modelo. Con λ= 4 y x=0, se busca en la Tabla de la Distribución Poisson y se tiene que:

   $P(x=0)=0.0183$ **R//**

b) Se pide calcular la probabilidad que haya 3 o menos errores en un modelo, esto es $P(x\leq3)$. Como las Tablas de la Distribución Poisson solo dan la probabilidad puntual, hay que plantear:

   $P(x\leq3)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)+P(x=3)$

   Buscando estos valores de x para λ= 4 en las tablas de la Distribución Poisson se tiene:

   $P(x\leq3)= P(x=0)+ P(x=1)+P(x=2)+ P(x=3)=0.0183+0.0733+0.1465+0.1954 =0.4335$

   $P(x\leq3)=0.4335$ **R//**

c) Se pide calcular la probabilidad de que el número de errores en un modelo sea mayor de 5, esto es$P(x>5)$. Como la variable es discreta hay que calcular $P(x\geq6)$.Esto puede hacerse utilizando la propiedad del complemento, esto es:

   $P(x\geq6)= 1- P(x\leq5)$

   Entonces

   $P(x\geq6)=1-P(x\leq5)= 1 - P(x=0) -P(x=1) -P(x=2) -P(x=3) -P(x=4) -P(x=5)$

   Sustituyendo por los valores numéricos que se encuentran en la Tabla de la Distribución Poisson:

   $P(x\geq6) =1-P(x\leq5)= 1 -0.0183 -0.0733 -0.1465 -0.1954 -0.1954 -0.1563$

   Entonces:

   $P(x>5)= 0.2149$ **R//**

d) Se pide calcular la probabilidad que el número de errores en un modelo este entre 2 y 4, esto es, $P(2\leq x\leq4)$. Entonces:

$P(2 \leq x \leq 4) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)$

Buscando el valor de $P(x=4)$ en la Tabla de la Distribución Poisson y sustituyendo los valores de $P(x=2)$ y $P(x=3)$, encontrados en el inciso b, se tiene que:

$P(2 \leq x \leq 4) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = 0.1465 + 0.1954 + 0.1954 = 0.5373$

$P(2 \leq x \leq 4) = 0.5373$ **R//**

La solución de este problema utilizando el Excel y conociendo, que la media de errores por modelo es $\lambda = 4$:

a) Se pide calcular $P(x=0)$, la cual es una probabilidad puntual, entonces en la ventana de la Distribución Poisson del Excel se introduce los valores de la media igual a 4 y de $x = 0$ y como se desea calcular una probabilidad puntual la etiqueta lógica en la ventana es falsa. Esto se muestra en la Figura 42.

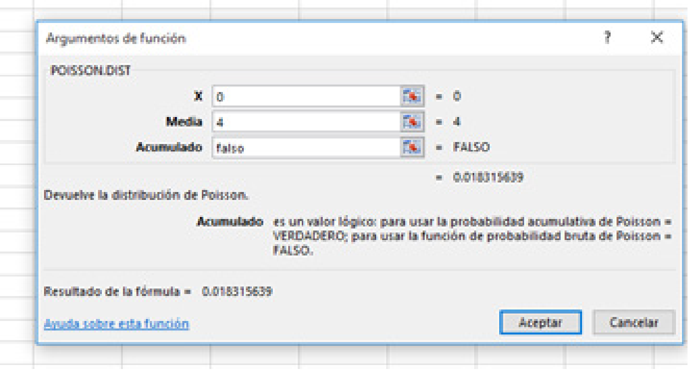


Figura 42. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PR4.8 inciso a.

Se puede ver directamente en la ventana que:

$P(x=0) = 0.0183$ **R//**

b) Se pide calcular la probabilidad que haya 3 o menos errores en un modelo, esto es, $P(x \leq 3)$. Para su solución utilizando el Excel, se mantiene el valor de la media igual a 4, $x = 3$ y como se desea calcular la acumulada hasta ese valor de x, la etiqueta en el valor lógico es verdadero. Esto se muestra en la Figura 43.

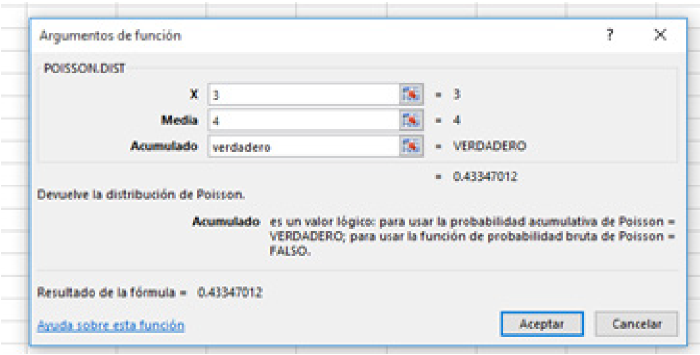


Figura 43. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PR4.8 inciso b.

El resultado puede observarse directamente en la ventana, entonces:

P(x≤3)=0.4335 **R//**

c) Se pide calcular la probabilidad de que el número de errores en un modelo sea mayor de 5, esto esP(x>5). Utilizando el Excel es más sencillo usar la propiedad del complemento y entonces:

P(x>5) = P(x≥6) = 1- P(x≤5)

Y el último término de la ecuación anterior puede hallarse directamente en la Función de la Distribución Poisson en Excel, para x=5 y etiqueta de verdadero para el valor lógico, lo que se muestra en la Figura 44.

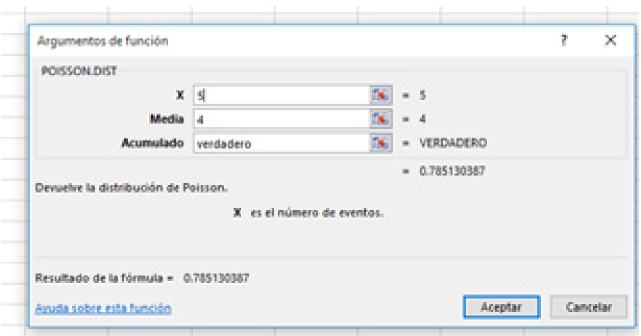


Figura 44. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PR4.8 inciso c.

Por tanto:

P(x>5) = P(x≥6) = 1- P(x≤5) = 1 – 0.7851 = 0.2149 **R//**

d) Hay que calcular la probabilidad que el número de errores en un modelo este entre 2 y 4, esto es, $P(2 \le x \le 4)$. Para resolverlo utilizando la función de la Distribución Poisson del Excel, hay que hacer la siguiente transformación:

$P(2 \le x \le 4) = P(x \le 4) - P(x \le 1)$

Note que el segundo término de la derecha de la ecuación permite incluir la probabilidad de x=2 que está en el intervalo a calcular.

El valor de los dos términos de la derecha con la Función de la Distribución Poisson del Excel se muestra en la Figura 45.

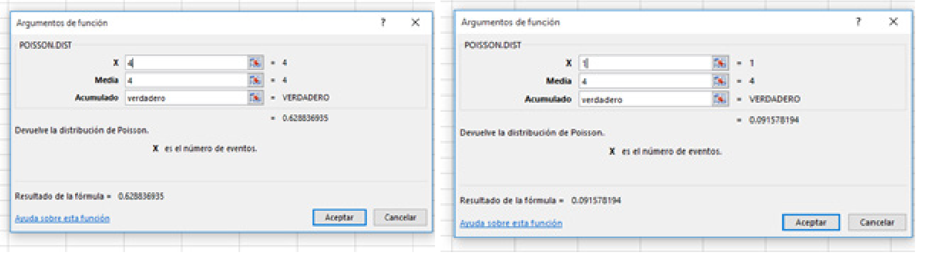


Figura 45. Ventanas de la Distribución Poisson en Excel para PR4.8 inciso d.

Sustituyendo los valores numéricos encontrados, se tiene:

$P(2 \le x \le 4) = P(x \le 4) - P(x \le 1) = 0.6288 – 0.0916 = 0.5372$

$P(2 \le x \le 4) = 0.5372$ **R//**

PR 4.8. A una lubricadora arriban cada hora un número aleatorio de autos para recibir servicios. Si se ha comprobado que está variable sigue una Distribución Poisson con media de 4 autos por hora, calcule la probabilidad que:

a) Arriben exactamente 6 autos en 4 horas.

b) Arriben 8 autos o menos en 4 horas.

c) Arriben más de 4 autos en 4 horas.

d) Arriben entre 6 y 8 autos en4 horas.

e) Arriben 2 autos o menos en 45 minutos.

SOLUCIÓN

Sea x la variable aleatoria que identifica el número de autos que arriban a la lubricadora en una hora, esta sigue una Distribución Poisson con media de 4 autos/hora. Como solicitan el cálculo de las probabilidades par un período de 4 horas, lo primero es determinar la media de arribos e ese período de tiempo, la que es:

λ= 4 autos/hora*4 horas= 16 autos

a) Se pide calcular P(x=6). Con λ= 16 se busca la Tabla correspondiente de la Distribución Poisson al final del libro y para x=6 la probabilidad es de 0.0026

   P(x=6)= 0.0026 **R//**

b) Se pide calcular P(x≤8). Como las tablas solo dan la probabilidad puntual, hay que sumar las probabilidades desde x=0, hasta x=8. Esto es:

   $P(x\leq 8)=P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)+P(x=3)+ P(x=4)+ P(x=5)+P(x=6)+ P(x=7)+ P(x=8)$

   $P(x\leq 8)=0.0000+0.0000+0.0000+0.0001+0.0003+0.0010+0.0026+0.0060+ 0.0120$

   $P(x\leq 8)=0.0220$ **R//**

c) Hay que calcular la P(x > 4). Como la variable es discreta esto es equivalente a calcular P(x≥ 5). Note en la Tabla que el valor de x para λ=16 se extiende desde 0 hasta 33, o sea habría que sumar desde P(x=5), hasta P(x=33). Entonces resulta mejor utilizar la propiedad del complemento, esto es:

   P(x≥ 5)=1 - P(x≤ 4) y de esta forma solo hay que sumar 4 valores, desde x=0, hasta x=3. Los cuales ya fueron encontrados en el inciso b. Entonces, sustituyendo:

   $P(x\geq 5)=1 - P(x\leq 4)= 1 - P(x=0) - P(x=1) - P(x=2) -P(x=3) - P(x=4) = 1 -0.0000-0.0000-0.0000-0.0001– 0.0003$

   $P(x\geq 4)= 0.9996$ **R//**

d) Hay que calcular P(6≤x≤8).

   $P(6\leq x\leq 8)=P(x=6)+ P(x=7)+ P(x=8)$

Estas probabilidades ya fueron encontradas en el inciso b, por tanto:

$P(6 \leq x \leq 8)=P(x=6)+ P(x=7)+ P(x=8)=0.0026+0.0060+0.0120 = 0.0206$

$P(6 \leq x \leq 8)=0.0206$ **R//**

e) En este inciso piden calcular la probabilidad de que sea menor que 2 pero en 45 minutos, por lo que hay que determinar el valor de λ para este intervalo. Como 45 minutos es ¾ de hora, entonces:

λ (45 minutos)= 4 autos/hora*3/4 hora = 3 autos

Con el valor de λ= 3 hay que calcular la $P(x \leq 2)$ y en las Tablas de la Distribución Poisson se tiene que:

$P(x \leq 2)=P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)=0.0498+0.1494+0,2240 =0.4232$

$P(x \leq 2)=0.4232$ **R//**

Utilizando el Excel para la solución de este problema, hay que seleccionar, dentro de las funciones estadísticas, la función POISSON.DIST.

De acuerdo a los datos la media de la Distribución Poisson para este problema, o sea, el número medio de arribo de autos en 4 horas es λ= 16.

En el inciso a hay que calcular la probabilidad que arriben exactamente 6 autos en 4 horas, esto es, P(x=6), lo que es una probabilidad puntual y en el valor lógico de la ventana del Excel se pondrá "falso". Esto se muestra en la Figura 46.

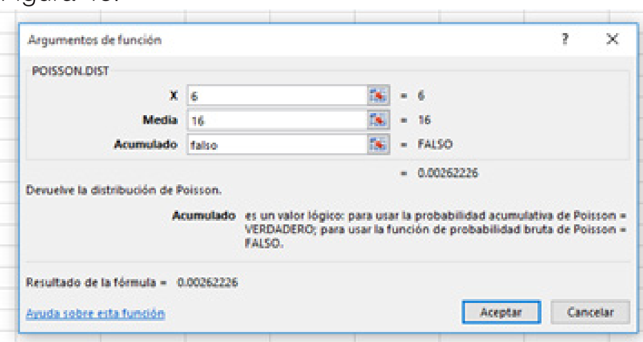


Figura 46. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PP 4.6 inciso a.

Puede leerse directamente que P(x=6) =0.0026, tal como fue encontrado utilizando las Tablas.

P(x=6) =0.0026 **R//**

En el inciso b se pide calcular P(x≤8). Como la función Excel de la Distribución Poisso permite calcular el acumulado hasta un valor de x, entonces puede calcularse directamente poniendo en el valor lógico la etiqueta “verdadero”. Esto se muestra en la Figura 47.

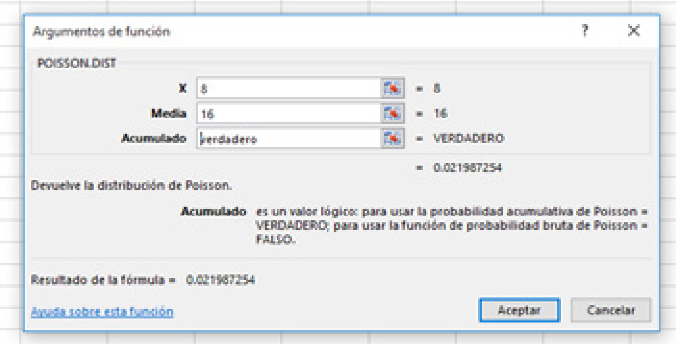


Figura 47. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PP 3.6 inciso b.

Puede leerse directamente que P(x≤8) = 0.02198 y aproximando:

P(x≤8) = 0.0220 **R//**

En el inciso c se pide calcularP(x≥5). Para utilizar el Excel hay que hacer uso del concepto del complemento, entonces:

P(x≥5)=1 - P(x≤4)

Y el último término de la ecuación anterior puede calcularse con el Excel. Esto se muestra en la Figura 48.

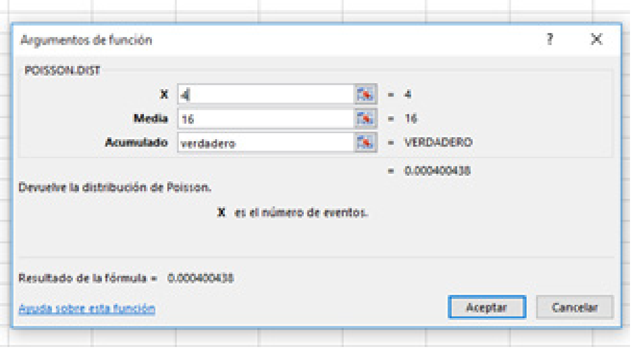


Figura 48. Ventana de la Distribución Poisson en Excel para PP 3.6 inciso c.

Entonces: $P(x \leq 4) = 0.0004$. Por tanto

$P(x \geq 5)=1 - P(x \leq 4)=1 -0.0004 = 0.9996$

$P(x \geq 4)=0.9996$ **R//**

4.1.8. Problemas propuestos de cálculo de las probabilidades en distribuciones discretas

PP 4.1. La cantidad de árboles maderables que pueden ser talados semanalmente, en un área forestal de 2 hectáreas, es una cantidad aleatoria, que sigue una Distribución Poisson con media de 10 árboles. Se desea calcular la probabilidad que para esa área forestal en una semana:

a) Haya 10 o menos árboles con posibilidades de ser talados.

b) Haya entre 5 y 15.

c) Haya al menos 8 árboles para talar.

d) Que en una hectárea de esa área haya al menos 5 árboles para talar.

e) Que en la misma área anterior haya entre 4 y 8 árboles para talar.

PP 4.2. En un residual líquido de un proceso productivo, en una muestra de un litro hay una cantidad aleatoria de un cierto tipo de contaminante, que sigue una Distribución Poisson con media de 5 mililitros. Con esta información, calcule la probabilidad que:

a) Haya 5 o menos ml de contaminante en la muestra.

b) Que la cantidad de contaminante esté entre 4 y 6 ml.

c) Que sea mayor de 8 ml.

PP 4.3. La probabilidad de que un alumno de la carrera de Gestión Ambiental desapruebe la asignatura de Estadística es de 0.3. Si se selecciona 10 alumnos al azar de esta carrera, calcule la probabilidad que:

a) Todos hayan aprobado la asignatura.

b) Que al menos la mitad haya aprobado.

c) Que dos o más hayan aprobado.

d) Que hayan aprobado entre 5 y 8 alumnos.

PP 4.4. La cantidad de agua de lluvia que cae cada día en determinada zona agrícola, es una variable aleatoria con Distribución Poisson de media 5 mm. Determine la probabilidad que en los próximos 3 días:

a) Caigan más de 20 mm de agua.

b) Caigan menos de 10 mm.

c) Caigan entre 15 y 25mm.

d) Si cuando caen menos de 3 mm de agua en un día, hay que utilizar los sistemas de regadíos, ¿cuál es la probabilidad de que haya que utilizarlos?

PP 4.5. La probabilidad que una solicitud de Licencia ambiental demore más de un mes en su aprobación es de es de 0.20. Asumiendo independencia entre las distintas licencias solicitadas, determine la probabilidad que en 5 licencias:

a) Todas demoren más de un mes en su otorgamiento.

b) No más de 2 licencias demoren más de un mes en su otorgamiento.

c) Todas las licencias demoren menos de un mes.

d) Al menos 4 licencias demoren menos de un mes en su otorgamiento.

PP 4.6. La cantidad de clientes que viene a consumir productos orgánicos en una cafetería cada hora es aleatoria y sigue una Distribución Poisson con media de 8 cliente por hora. Calcule la probabilidad que:

a) Lleguen menos de 8 clientes en una hora.

b) Lleguen como mínimo 6 clientes en una hora.

c) La cantidad de clientes esté entre 5 y 8 clientes.

d) Que haya 4 clientes o menos en media hora.

e) Haya más de 2 clientes en 15 minutos.

PP 4.7. Un laboratorio farmacéutico afirma que un medicamento causa efectos secundarios en una proporción de 10 de cada 100 pacientes. Si en un hospital se aplica este medicamento a 12 pacientes. calcule la probabilidad que:

a) Dos o menos pacientes tengan efectos secundarios.

b) Ninguno presente efectos secundarios.

c) Que haya entre 2 y 5 pacientes con efectos secundarios.

d) Que haya al menos 3 pacientes que tengan efectos secundarios.

PP 4.8. Una entidad financiera tiene una probabilidad de 0.1 de no recuperar completamente un préstamo realizado para desarrollo local. Si este mes la entidad ha aprobado 15 préstamos, calcule la probabilidad que:

a) Que no recupere como máximo dos préstamos.

b) Que recupere todos los préstamos.

c) Que no recupere entre 1 y 2 préstamos.

d) Que recupere más de 8 de los préstamos.

PP 4.9. Se ha calculado que históricamente un equipo de futbol gana 6 de cada 10 juegos que realiza. Si le quedan 5 juegos para terminar el campeonato, calcule la probabilidad que:

a) Gane todos los juegos.

b) Gane al menos 2 de los juegos.

c) Pierda todos los juegos que quedan.

d) Pierda no más de 2 juegos de los que le quedan.

PP 4.10. La cantidad de barcos que llegan a un puerto para cargar contenedores sigue una Distribución Poisson con media de 2 barcos por día. Calcule la probabilidad que en 5 días:

a) Arriben menos de 10 barcos de este tipo al puerto.

b) Arriben 15 o más.

c) Arriben entre 14 y 20.

d) Arriben más de 12.

PP4.11. Una empresa de la construcción, tiene una probabilidad de 0.8 de entregar las obras para el desarrollo local en el tiempo comprometido. Calcule la probabilidad que en 10 obras seleccionadas aleatoriamente:

a) Al menos 8 se entreguen en el tiempo comprometido.

b) Que exactamente dos, no se entreguen en el tiempo comprometido.

c) Que entre 8 y 10 obras, se entreguen en el tiempo comprometido.

d) Que todas las obras, se entreguen en el tiempo comprometido.

PP 4.12. La cantidad de clientes que arriban a las cajas para realizar el pago de las mercancías adquiridas en un pequeño mercado, sigue una Distribución Poisson con media de 3 clientes por minuto. Calcule la probabilidad que:

a) En 3 minutos arriben más de 15 clientes a las cajas.

b) Que en 5 minutos arriben entre 20 y 30 clientes.

c) Que en 2 minutos arriben no más de 10 clientes.

d) En 3 minutos arriben 12 o menos clientes.

PP 4.13. Un producto semi elaborado sale de un proceso con una probabilidad de 0.10 de ser defectuoso. Si se toma una muestra aleatoria a la salida de este proceso de 12 productos, calcule la probabilidad que:

a) Haya menos de 2 defectuosos.

b) Haya entre 2 y 4 productos defectuosos.

c) Todos los productos seleccionados no tengan defectos.

d) No más de 3 productos tengan defectos.

PP 4.14. La probabilidad de que un aspirante sea seleccionado en una empresa para ocupar una plaza es de 0.4. Si se presentan 10 aspirantes a una convocatoria, calcule la probabilidad que:

a) Todos sean seleccionados.

b) Al menos 5 sean seleccionados.

c) Que 2 o menos no sean seleccionados.

d) Que más de 5 no sean seleccionados.

PP 4.15. El número de pacientes que arriban a Urgencias en un hospital diariamente, es una variable aleatoria con Distribución Poisson de media 18 pacientes. Se quiere calcular la probabilidad que:

a) Arriben 20 o más pacientes en un día.

b) Que arriben entre 15 y 25 pacientes en un día.

c) Que arriben menos de 10 pacientes en medio día.

d) Que arriben más de 10 pacientes en 9 horas.

4.2. Distribuciones de variables aleatorias continuas más usadas

La variable aleatoria x tiene Distribución de Probabilidad Uniforme en el intervalo (A, B) , sí su Función de Densidad Probabilística es :

f (x) = 1 / B-A para A ≤ x ≤ B

Por tanto, para calcular la probabilidad de cualquier valor de x en ese intervalo, hay que hallar la integral definida para los valores de x que se deseen.

La Media y la Varianza de la Distribución Uniforme son:

E(x)= A + B / 2

V(x)= B – A / 12

Ejemplo 4.5. El tiempo de solución de una rotura en un sistema de suministro de agua sigue una Distribución Uniforme entre 12 y 15 días. Calcule la probabilidad que:

a) La solución demore menos de 13.5 días en resolverse.

b) Que se demore la solución entre 13.5 y 14 días.

Solución

Los parámetros de la Distribución Uniforme son: A= 12 días y B= 15 días, por tanto, la Distribución de Probabilidad es:

f(x) = 1/B-A = 1/15 – 12= 1/3 para 12≤ x ≤15

f(x) = 1/3 para 12≤ x ≤15

a) Se pide calcular P(x ≤ 13.5).

$$P(x \leq 13.5) = \int_{12}^{13.5} \frac{1}{3}\,dx = \frac{13.5-12}{3} = \frac{1.5}{3} = 0.50$$

$P(x \leq 13.5) = 0.50$ **R//**

b) Se pide calcular P

$$P(13.5 \leq x \leq 14) = \int_{13.5}^{14} \frac{1}{3}\, dx = \frac{14 - 13.5}{3} = \frac{0.5}{3} = 0.1666$$

$P(13.5 \leq x \leq 14) =$ 0.1666 0.1666 **R//**

4.2.1. Distribución normal

Es la distribución continua más importante en todo el campo de la Estadística debido a que:

- Es la que más se presenta en la vida real, es decir, describe de forma bastante aproximada la curva de comportamiento habitual de muchos procesos que se presentan en la naturaleza y en la industria y los servicios.
- Si se cumplen determinadas condiciones, todas las distribuciones pueden aproximarse utilizando la Normal.

La Función de Densidad probabilística de la Distribución Normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad para \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Donde:

μ: Valor Esperado o Media de la Población

σ: Desviación Típica de la Población

La curva que representa a la Distribución Normal se muestra en la Figura 49.

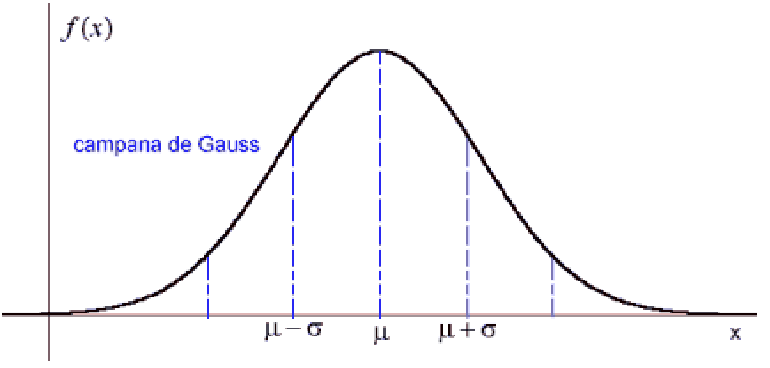


Figura 49. Representación gráfica de la Distribución Normal.

Los paquetes estadísticos, entre ellos el que tiene el EXCEL, permite calcular cualquier valor para un intervalo de x en esta función de densidad probabilística.

PROPIEDADES:

1- Tiene forma de campana y es simétrica con respecto a μ

2-Los parámetros de la Normal son μyλ. Para cada combinación de esos parámetros se corresponde una única Distribución Normal.

3-Existe un máximo de la curva para x = μ

4-La probabilidad que la variable se encuentre entre dos puntos cualesquiera, es el área bajo la curva entre esos dos puntos.

4.2.2. Distribución normal estándar

Es la Distribución Normal con μ = 0 y σ = 1

Cualquier Distribución Normal con mediaμ y desviación estándar σ puede transformarse a la Distribución Normal Estándar utilizando la siguiente expresión:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Para hallar la P (a ≤ x ≤ b) donde x se distribuye N (μ , σ) es equivalente a encontrar P (za≤ z ≤zb donde :

$$z_a = \frac{a-\mu}{\sigma} \text{ y } z_b = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

La Distribución Normal Estándar esta tabulada y esta tabla aparece en cualquier libro de estadística o probabilidades. Una muestra de esta tabla se presenta en la Figura 46.

4.2.3. Cálculo de las probabilidades de una variable aleatoria con distribución normal utilizando las tablas

Las Tablas de la Distribución Normal Estándar publicadas, tienen distintas formas de dar la probabilidad acumulada hasta un valor de la variable. La que se muestra en la Figura 50, acumula la probabilidad desde menos infinito, pero solo para valores de z positivos. Por eso, según el caso, habrá que utilizar las propiedades de simetría de dicha distribución y del complemento, para calcular las probabilidades en el intervalo deseado. Se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo 4.6. La cantidad de desecho sólido (bagazo) en una industria azucarera cada mes, es aleatoria, con una Distribución Normal con media de 24 toneladas y desviación estándar de 2 ton. Se desea calcular la probabilidad de que la industria produzca menos de 26 toneladas en un mes.

SOLUCIÓN

Los datos de este problema son los parámetros de la Distribución Normal, esto es:

μ = 24 ton/mes

σ = 2 ton/mes

Sea x una variable aleatoria con Distribución Normal que representa la producción mensual de bagazo en esa industria. Piden calcular: P(x ≤ 26)

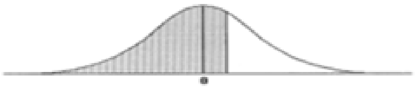
Para usar las Tablas de la Distribución Normal Estándar, hay que estandarizar los valores de x en z, esto es:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

P(x ≤ 26) = P($z \leq (26 - 24)/2) = P(z \leq 1)$

al%201/TABLAS-ESTADISTICAS.pdf

TABLA-T3: DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR



$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t/2} \ dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Figura 50. Tabla de la Distribución Normal.

Esto queda representado en un gráfico de la Distribución Normal Estándar como se muestra en la Figura 51.

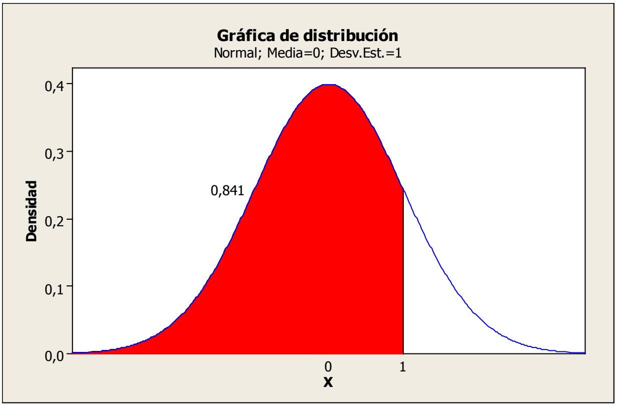


Figura 51. Representación gráfica de la $P(z \leq 1)$

Este valor puede encontrarse directamente en la Tabla de la Distribución Normal Estándar que aparece en la Figura 50 y entonces $P(z \leq 1) = 0.8413$.

Por lo tanto:

$P(x \leq 26) = P(z \leq 1) = 0.8413$

Que es la probabilidad de producir 26 o menos toneladas de bagazo en un mes de producción.

Se desea calcular la probabilidad de que la producción mensual de bagazo de esta industria esté entre 26 y 28 toneladas, esto es:

$P(26 \leq x \leq 28)$

Estandarizando esta expresión:

$$P(26 \leq x \leq 28) = P\left(\frac{26-24}{2} \leq \mathbf{z} \leq \frac{\mathbf{28-24}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{P(1 \leq z \leq 2)}$$

Gráficamente este intervalo en la Distribución Normal Estándar se muestra en la Figura 52.

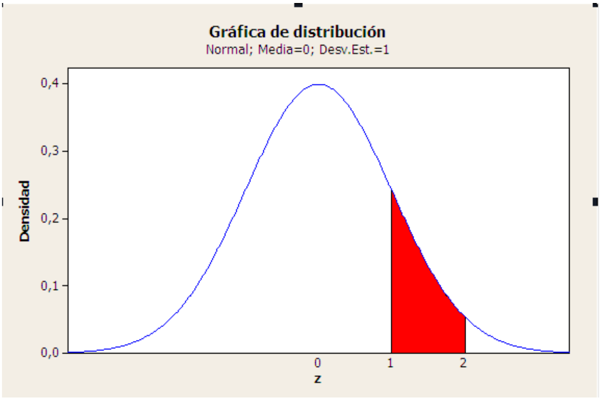


Figura 52. Representación gráfica de la $P(1 \leq z \leq 2)$.

Pero esto no puede encontrarse directamente en la Tabla y habrá que descomponerlo en dos términos:

$$P(1 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z \leq 1)$$

Buscando en la Tabla:

$$P(z \leq 2) = 0.9772 \quad y \quad P(z \leq 1) = 0.8413$$

Entonces:

$P(1 \leq z \leq 2) =$ 0.9772 -0.8413 = 0.1359

$$P(26 \leq x \leq 28) = 0.1359$$

Que es la probabilidad de que la producción mensual de bagazo esté entre 26 y 28 toneladas.

Supongase que se quiere calcular la probabilidad de que la producción mensual de bagazo de esa industria sea menor que 21 toneladas en un mes. Esto se plantea de la siguiente forma:

$P(x \leq 21)$

Estandarizando a la variable z queda:

$$z = \frac{21 - 24}{2} = -1.5$$

Graficamente esta probabilidad se muestra cen la Figura 53.

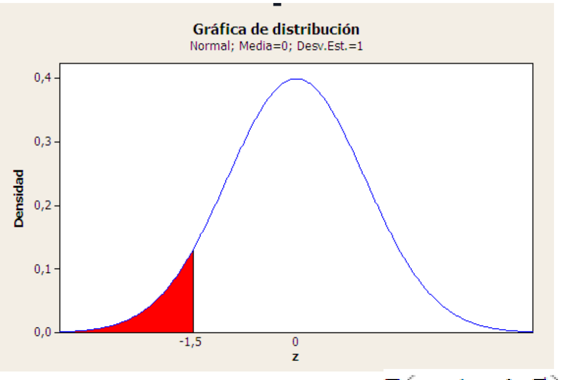


Figura 53. Representación gráfica de la $\mathbf{P(z \leq -1.5)}$.

Como la Tabla de la Distribución Normal Estándar que se está utilizando, no tiene valores negativos de z, habrá que utilizar la propiedad de simetría de la Distribución Normal y plantear:

$P(z \leq -1.5) = P(z \geq 1.5)$

El gráfico para la parte derecha de la igualdad anterior se muestra en la Figura 54.

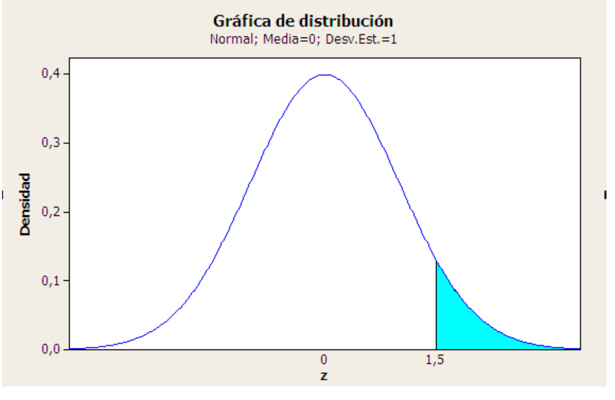


Figura 54. Representación gráfica de $P(z \geq 1.5)$.

Pero tampoco el área sombreada aparece directamente en la tabla, sino la que aparece es la acumulada desde menos infinito hasta z=1.5, entonces finalmente, aplicando la propiedad del complemento:

$P(z \leq -1.5) = P(z \geq 1.5) = 1.0 - P(z \leq 1.5)$

Y en la Tabla de la Distribución Normal Estándar$P(z \leq 1.5) = 0.9332$

Entonces:

$P(z \leq -1.5) = P(z \geq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

$P(x \leq 21) = 0.0668$

Queda finalmente el caso en que el intervalo quede con un valor positivo y otro negativo. Suponga que se quiere determinar la probabilidad de que la producción de bagazo de esa industria en un mes esté entre 22 y 26, esto es:

$$P(22 \leq x \leq 26) = P\left(\frac{22-24}{2} \leq z \leq \frac{26-24}{2}\right) = P(-1 \leq z \leq 1)$$

Esto se muestra graficamente en la Figura 55.

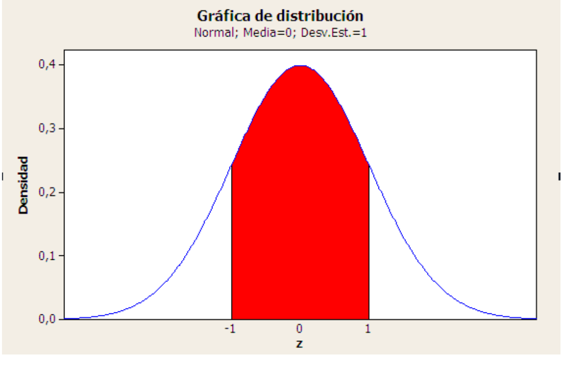


Figura 55. Representación gráfica de $P(-1 \leq z \leq 1)$.

Para hallar la probabilidad solicitada, habrá que descomponer y utilizar las propiedades de la Distribución Normal, entonces:

$$P(-1 \leq z \leq 1) = P(z \leq 1) - P(z \leq -1)$$

Y ya se estudió cómo calcular los dos términos de la derecha de esa ecuación.

Entonces:

$P(z \leq 1) =$ 0.8413

$P(z \leq -1) = 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

$P(-1 \leq z \leq 1) =$ 0.8413 – 0.1587 = 0.6826

Y finalmente:

$P(22 \leq x \leq 26) = 0.6826$

En los Problemas Resueltos de las Distribuciones continúas se continuará practicando el uso de las Tablas de la Distribución Normal Estándar.

4.2.4. Cálculo de las probabilidades de una distribución normal utilizando el excel

El uso de paquetes informáticos para calcular las probabilidades simplifica notablemente esta tarea. En las funciones estadísticas que tiene el Excel, tal como se vio en el caso de las variables discretas, aparece un buen número de funciones para el cálculo de su probabilidad. En el caso de la Distribución Normal aparece la función DIST.NORM.N Y para la Distribución Normal Estándar DIST.NORM.ESTAND.N. Para ejemplificar el uso se utilizará la primera.

Ejemplo 4.7. Utilizando los mismos datos del Ejemplo 4.6 relacionado con la producción de bagazo en una industria azucarera, se tiene que:

$\mu = 24$ ton/mes

$\sigma = 2$ ton/mes

Si x se define como la cantidad de toneladas de bagazo producidas en un mes en esa industria y se desea calcular la probabilidad que se produzca menos de 26 toneladas en un mes, esto puede denotarse como: $P(x \leq 26)$.

En una Hoja Excel se selecciona dentro de las funciones estadísticas la DIST. NORM.N y aparece la ventana que se muestra en la Figura 56.

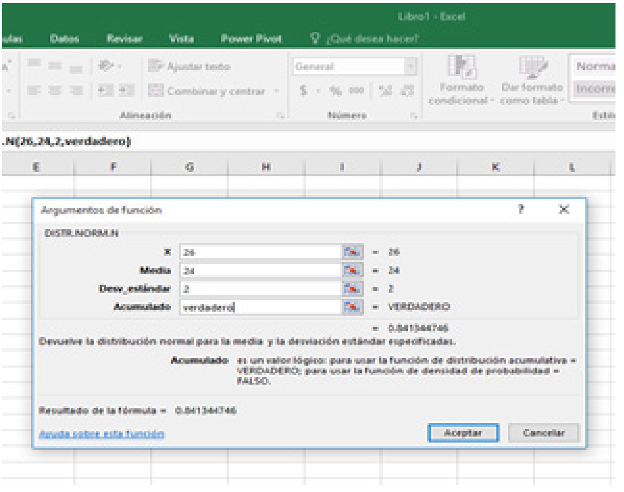


Figura 56. Ventana en Excel de la función de la Distribución Normal.

En x se pondrá el valor de x hasta el que se desea calcular la probabilidad acumulada, en la segunda celda el valor de la media de la Distribución Normal y en la tercera el de la Desviación Típica o Estándar y en la última celda se pondrá la palabra cierto que dará la probabilidad acumulada hasta el valor de x. En la figura ya aparecen los valores del ejemplo. Note que en la ventana aparece el valor calculado, esto es, $P(x \leq 26) = 0.8413$

Si se desea calcular: $P(26 \leq x \leq 28)$, entonces hay que descomponer esta expresión en función de sus distribuciones acumuladas, esto es:

$P(26 \leq x \leq 28) = .P(x \leq 28) - P(x \leq 26)$.

El 2do término de la derecha ya fue calculado y para calcular el primero utilizando el Excel, se utiliza una vez más la función DIST.NORM. N . La ventana se muestra en la Figura 57.

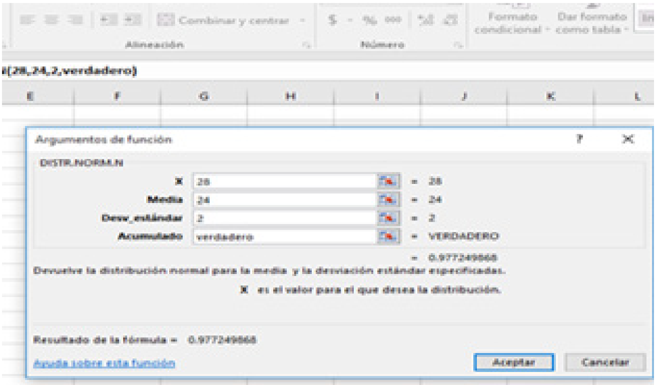


Figura 57. Ventana en Excel de la función de la Distribución Normal.

Donde aparece que P(x ≤ 28)= 0.9772 y entonces:

P(26 ≤ x ≤ 28) = P(x ≤ 28) - P(x ≤ 26) = 0.9772 – 0.8413 = 0.1359

Para el caso que x de un valor por debajo de la media, utilizando el Excel sale directo y no hay que hacer todas las transformaciones que se hicieron en el caso de utilizar tablas. Un ejemplo para calcular P(x ≤ 22) se muestra en la Figura 58.

Y puede verse que P(x ≤ 22) = 0.1586

Como puede observarse es sumamente sencillo la utilización del EXCEL para el cálculo de las probabilidades en una Distribución Normal.

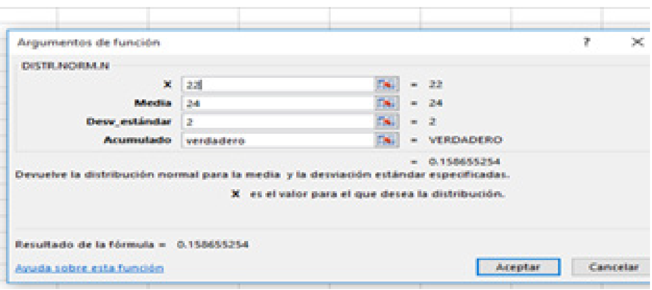


Figura 58. Ventana en Excel de la función de la Distribución Normal para calcular P(x ≤ 22).

OTRAS PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Sean x_1, x_2, ... , x_k variables aleatorias independientes con Distribución Normal, esto es:

x_i se distribuye $N(\mu_i, \sigma_i)$.Sea:

$Y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k$

Entonces:

$Y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ sigue una Distribución Normal con:

$$\mu(Y) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i$$

$$\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{k} a^2 \sigma^2$$

Ejemplo 4.8. Una pieza se conforma a partir de la unión soldada de dos elementos que se producen en 2 talleres. La longitud de cada pieza es aleatoria. La primera sigue una distribución normal con media de 300 mm y desviación estándar de 10 mm. La segunda sigue también una distribución normal con media de 150 mm y desviación estándar de 5 mm. Se puede asumir independencia en la producción de ambas piezas. Si las especificaciones de calidad establecen que la pieza completa debe tener una longitud de 450 mm ± 10 mm, determine la probabilidad de que se produzca una pieza defectuosa.

SOLUCIÓN

La longitud total de la pieza es:

$L = L_1 + L_2$

Aplicando las propiedades de la media y varianza de una Distribución Normal se tendrá:

$$\mu(L) = \mu(L_1) + \mu(L_2)$$

$$\sigma^2(L) = \sigma^2(L_1) + \sigma^2(L_2)$$

De los datos anteriores se tendrá:

μ = 300 + 150 = 450 mm

$$\sigma(L) = \sqrt{10^{2} + 5^{2}} = 11.18$$

La probabilidad de que la pieza esté buena sería:

P (440 ≤ L ≤ 460) donde L sigue una Distribución Normal con media de 450 mm y desviación estándar de 11.18.

Usando las funciones estadísticas del EXCEL se tendrá que:

P (440 ≤ L ≤ 460)= P(L ≤ 460) – P(L ≤ 440)=0,8144 -0,1855 = 0,6289

P (440 ≤ L ≤ 460)= 0,6289

4.2.5. Cálculo del percentil en una distribución normal

En la Estadística es de amplio uso los percentiles de la Distribución Normal. Un percentil P no es más que el valor de z en una Distribución Normal Estándar, por debajo del cual hay una probabilidad acumulada igual a P. Así $z_{0.90}$, es el valor de z para el cual la probabilidad acumulada es de 0.90.

Para hallar los valores de los percentiles de una Distribución Normal Estándar, pueden encontrarse tablas que dan directamente este valor. Si lo que se tiene es una tabla como la que se ha venido trabajando hasta ahora, lo que se hace es buscar en el cuerpo de la tabla el valor más aproximado al percentil solicitado y ya localizado se identifica el valor de z al cual pertenece.

Por ejemplo, si se quisiera determinar, utilizando la Tabla de la Distribución Normal Estándar, el valor de $z_{0.80}$, entonces, tal como se muestra en la Figura 59, se localiza el valor más aproximado a 0.80 en el cuerpo de la tabla (flecha roja) y a este corresponderá un valor de z igual a 0.84 (flechas azules), esto es $z_{0.80}$=0.84.

TABLA-T3: DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t/2}\ dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	[illegible]	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147

Figura 59. Búsqueda del valor del percentil de una Distribución Normal Estándar utilizando la Tabla.

Utilizando el Excel se facilita encontrar el valor de un percentil. Para ello se utilizará la Función Excel DIST.NORM.EST.INV Y SE DESPLIEGA EN LA Hoja Excel la ventana que aparece en la Figura 60.

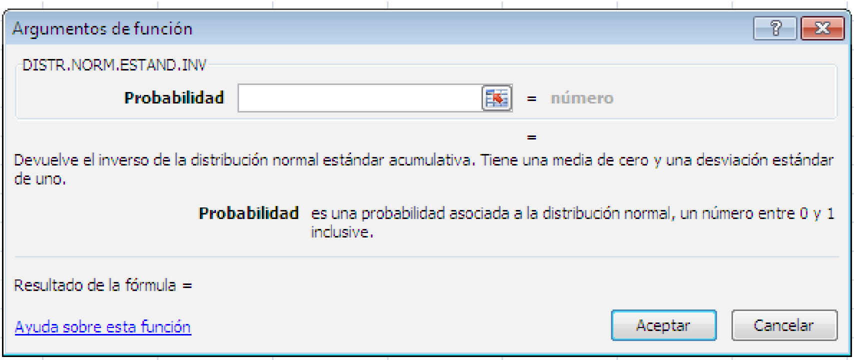


Figura 60. Ventana de Excel para el cálculo del percentil en una Distribución Normal Estándar.

En donde se solicita el valor de Probabilidad, se pone el valor del percentil deseado y directamente aparece el valor de z asociado a ese percentil. Para calcular $z_{0.80}$, se pone el valor 0.80 en probabilidad, se da Aceptar y directamente en la ventana aparece el valor del percentil, tal como se muestra en la Figura 61.

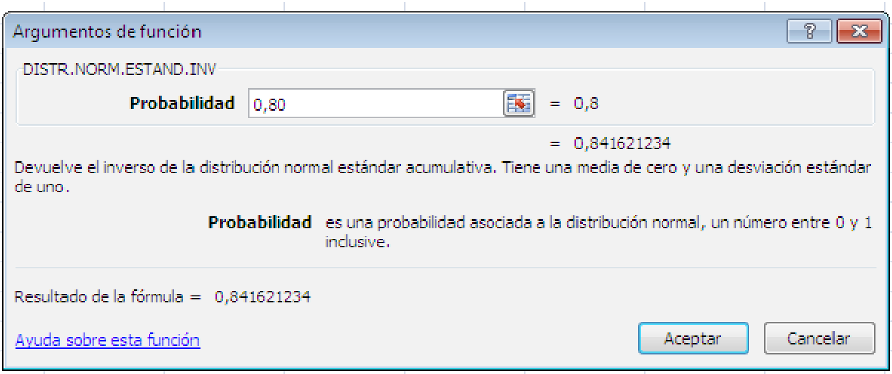


Figura 61. Resultado del cálculo de $z_{0.80}$ utilizando la función Excel.

Como puede observarse $z_{0.80}$ = 0.8416.

Para conocer esos percentiles en una Distribución Normal de media μ y desviación estándar λ, entonces habría que hallar el valor de x, despejando en la ecuación de estandarización, esto es:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x_{0.90} = \mu + z_{0.90} * \sigma$$

En el caso de utilizar Excel, este tiene la función para una Distribución Normal cualquiera y puede utilizarse esta función directamente.

4.2.6. Problemas resueltos de la distribución normal

PR 4.9. En una finca ecológica que produce zanahoria, la producción semanal de este tubérculo, sigue una Distribución Normal con media de 250 kg y desviación típica de 2 kg. Calcule la probabilidad de:

a) Que la finca produzca más de 252 kg en una semana.

b) Que produzca menos de 246 kg.

c) Que la producción semanal esté entre 249 y 251 kg.

d) ¿Cuál es el valor de producción semanal de zanahoria por debajo del cual hay una probabilidad acumulada de 0,95?

SOLUCIÓN

La producción semanal de zanahoria en esa finca sigue una Distribución Normal con media μ=250 kg y desviación típica de 2 kg. Se define x como la producción semanal de zanahoria.

a) Se pide calcular la P(x ≥ 252), entonces transformando la variable a la Distribución Normal Estándar se tiene:

P(x ≥ 252) = $P\left(z \geq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z \geq \frac{252-250}{2}\right) = P(z \geq 1)$

De acuerdo a la Tabla de la Distribución Normal Estándar que está disponible en este libro, esta probabilidad, no se puede encontrar directamente y hay que utilizar la probabilidad del complemento. Entonces:

$P(z \geq 1) = 1 - P(z \leq 1)$

Y en la Tabla de la Distribución Normal se puede encontrar la $P(z \leq 1)$ =0.8413.

Entonces:

$P(z \geq 1) = 1 - P(z \leq 1)$ = 1 - 0.8413 =0.1587

P(x ≥ 252) = 0.1587

O sea, un 15.87% de las semanas se producirá más de 252 kg de zanahoria.

b) Se pide calcular la P(x ≤ 246). Transformando a la Distribución Normal Estándar:

P(x ≤ 246) = $P\left(z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z \leq \frac{246-250}{2}\right) = P(z \leq -2)$

Tampoco la Tabla de la Distribución Normal disponible permite calcular directamente esta probabilidad y haciendo uso de la propiedad de simetría de la Distribución Normal, puede plantearse que:

$P(z \leq -2)$ = $P(z \geq 2)$Y para calcular el término de la derecha de la igualdad anterior , se procede igual que en el inciso a, esto es:

$P(z \geq 2)$ = 1 -$P(z \leq 2)$

Distribución Normal $P(z \leq 2)$, se tiene que:

$P(z \leq 2)$ = = 0.9772

Y finalmente:

$P(z \geq 2)$ = 1 - $P(z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

$P(x \leq 246) = 0.0228$ **R//**

Esto es solamente un 2.28% de las semanas, la finca producirá menos de 246 kg de zanahoria.

c) Se pide calcular P (249 ≤ x ≤ 251). Transformando esta probabilidad a la Distribución Normal Estándar se tiene:

P (249 ≤ x ≤ 251) = $P\left(\frac{249-250}{2} \leq z \leq \frac{251-250}{2}\right) = P(-0.5 \leq z \leq 0.5)$

Transformando para poder utilizar las Tablas de la Distribución Normal se tiene:

$P(-0.5 \leq z \leq 0.5)$ = P(z$\leq 0.5) -$ P(z $\leq -0.5)$

El primer término de la parte derecha de la igualdad puede encontrarse directamente en las Tablas, esto es:

P(z $\leq 0.5) = 0.6915$

Para el 2do término hay que aplicar la propiedad de simetría y entonces:

P(z$\leq -0.5)$ = P(z $\geq 0.5) = 1 - \mathbf{P(z \leq 0.5)}$

Sustituyendo el valor de $\mathbf{P(z \leq 0.5)}$, **encontrado anteriormente** :

P(z$\leq -0.5)$ = P(z $\geq 0.5) = 1 - \mathbf{P(z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085}$

Entonces:

$P(-0.5 \leq z \leq 0.5)$ = P(z$\leq 0.5) -$ P(z $\leq -0.5) = 0.6915 - 0.3085 = 0.3830$

P (249 ≤ x ≤ 251) = $P(-0.5 \leq z \leq 0.5)$ = 0.3830

P (249 ≤ x ≤ 251) = 0.3830 **R//**

Esto significa que un 38% aproximadamente de las semanas, la producción de zanahoria de esta finca estará entre 249 y 251 kg.

d) Se pide calcular el percentil 95 de esta Distribución Normal. Si se trabaja con la estandarizada para utilizar las Tablas, es necesario encontrar el valor de $z_{0.95}$ y posteriormente despejar x en la ecuación de estandarización. Entonces:

Para hallar el valor de $z_{0.95}$, se busca en le cuerpo de la Tabla de la Distribución Normal el valor más cercano a 0.95, el cual es 0,95053 y este se corresponde con un valor de x= 1,65. Entonces despejando el valor de x en la ecuación de estandarización:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x_{0.95} = \mu + z_{0.95} * \sigma = 250 + 1.65 * 2 = 253.3\ kg$$ **R//**

Esto es por debajo de 253.3 kg de producción semanal de zanahoria hay una probabilidad acumulada de 0,95.

Se aplica ahora la Función DISTR.NORM.N del Excel para soluciónar este problema.

a) Se pide calcular la probabilidad de que en una semana se produzca más de 252 kg de zanahoria, esto es, P ($x \geq 252$). La función de la Distribución Normal en Excel solo da valores de la Distribución Acumulada y por tanto hay que hay que aplicar el concepto del complemento y se tiene:

   P ($x \geq 252$) = 1 - P ($x \leq 252$)

Y entonces P ($x \leq 252$) puede calcularse con la función Excel directamente, sin necesidad de hacer la estandarización. La ventana de la función de la Distribución Normal para este cálculo se muestra en la Figura 62.

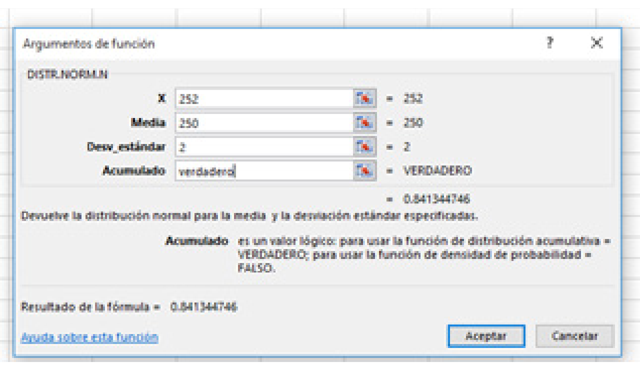


Figura 62. Ventana de la función de la Distribución Normal en Excel para inciso a PR 4.9.

Puede verse que P (x≤ 252) = 0.8413, entonces:

P (x≥252) = 1 - P (x≤ 252) = 1 – 0.8413 = 0.1587

P (x≥252) = 0.1587 **R//**

b) Se pide calcular la P (x≤246). Esto puede obtenerse directamente de la función Excel para la Distribución Normal. La ventana para este caso se muestra en la Figura 63.

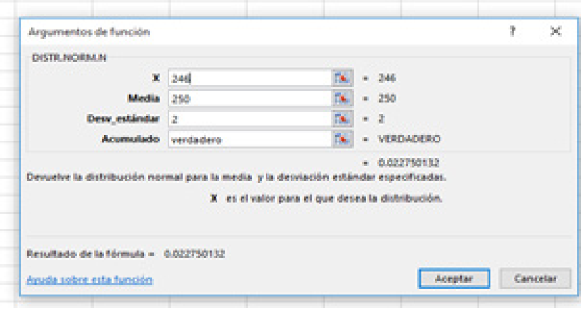


Figura 63. Ventana de la función de la Distribución Normal en Excel para inciso b PR 4.9.

c) Se pide calcular P (249 ≤ x ≤ 251). Para hallar la probabilidad en este intervalo, es necesario descomponerlo en sus dos funciones acumuladas, como se vio anteriormente. Así:

P (249 ≤ x ≤ 251) = P (x ≤ 251) - P (x ≤ 249).

El cálculo de ambos términos de la parte derecha de la anterior igualdad puede realizarse directamente con la función Excel de la Distribución Normal. Ambas ventanas se muestran en la Figura 64.

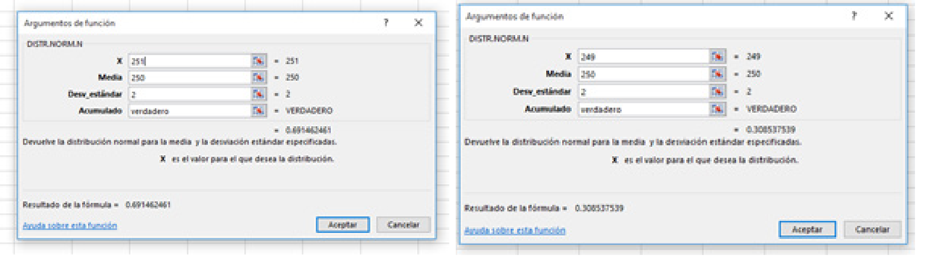


Figura 64. Ventana de la función de la Distribución Normal en Excel para inciso c PR 4.9.

De las ventanas puede verse los valores deP (x ≤ 251) = 0.6915 y P (x ≤ 249) = 0.3085. Por tanto:

$P(249 \leq x \leq 251) = P(x \leq 251) - P(x \leq 249) = 0.6915 - 0.3085 = 0.3830$

$P(249 \leq x \leq 251) = 0.3830$ **R//**

Para el caso del inciso d, se resolverá utilizando la función Excel INV.NORM que da directamente el percentil para cualquier Distribución Normal y al poner los datos en la ventana aparece directamente el valor de $x_{0.95}$, tal como se muestra en la Figura 65.

De la ventana puede observarse directamente que para los valores de la media y la desviación estándar dados, $x_{0.95} = 253{,}2897$.

$x_{0.95} = 253{,}2897$ **R//**

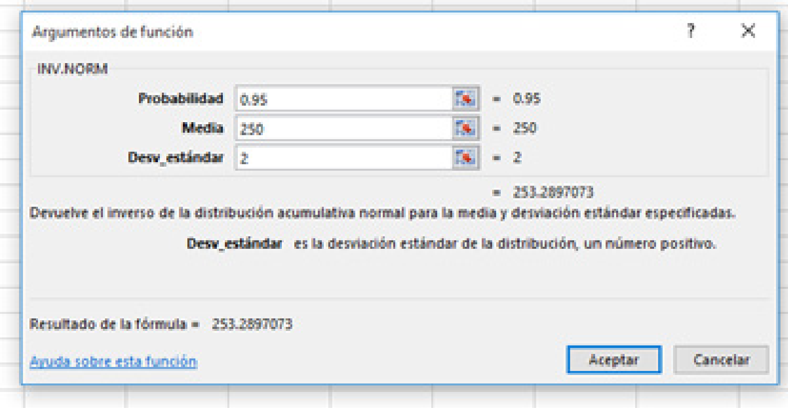


Figura 65. Ventana de Excel para calcular percentiles de la Distribución Normal.

PR 4.10. El consumo de pesticida mensual en una pequeña empresa agrícola, sigue una Distribución Normal con media de 5 000 litros y desviación estándar de 20 litros. Calcule la probabilidad de:

a) Que gaste exactamente 5 000 litros.

b) Que gaste más de 5030 litros.

c) Que en un mes esa empresa gasté menos de 4980 litros.

d) Que el consumo en el mes este entre 4 990 y 5020.

e) ¿Cuál es el valor del consumo mensual, cuya probabilidad de sobrepasarlo será de 0,02?

SOLUCIÓN

Este problema sigue una Distribución Normal con parámetros de μ=5 000 litros y desviación estándar σ = 20 litros. Se define x como la variable aleatoria de cantidad de litros de pesticida consumidos en un mes.

a) Se pide calcular la P (x= 5 000). Como x es una variable con Distribución Normal, se conoce que por definición, la probabilidad en un punto para este tipo de variable es igual a cero. Por tanto:

P(x= 5 000) = 0 **R//**

b) Se pide calcular P(x≥ 5 030). Entonces estandarizando para la Distribución Normal Estándar se tiene que:

P(x≥ 5 030) = $P\left(z \geq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z \geq \frac{5030-5000}{20}\right) = P(z \geq 1.5)$

El último valor de la expresión anterior, no puede calcularse directamente en la Tabla de la Distribución Normal Estándar disponible. Por tanto, hay que utilizar las transformaciones estudiadas y entonces, utilizando el complemento:

$P(z \geq 1.5) = 1 - P(z \leq 1.5)$

Y $P(z \leq 1.5)$ se puede encontrar en la Tabla.

$P(z \leq 1.5) = 0.9332$

$P(z \geq 1.5) = 1 - P(z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

Finalmente:

P(x≥ 5 030) = $P(z \geq 1.5)$ = 0.0668

P(x≥ 5 030) = 0.0668 **R//**

O sea, la probabilidad de que se consuma más de 5020 litros de pesticida en un mes, es pequeña e igual a 0.0669.

c) Se pide calcular la probabilidad de que en un mes esa empresa gasté menos de 4980 litros, esto es, P(x≤ 4980).

Para utilizar la Distribución Normal Estándar:

P(x≤ $4980) = P(z \leq (4980 - 5000)/20) = P(z \leq -1.0)$

El valor de $P(z \leq -1.0)$ no se puede encontrar directamente en la Tabla y hay que aplicar la propiedad de simetría de la Distribución Normal, entonces:

$$P(z \leq -1.0) = P(z \geq 1.0)$$

Aplicando ahora el complemento:

$$P(z \geq 1.0) = 1 - P(z \leq 1.0)$$

Y $P(z \leq 1.0)$ puede encontrarse en la Tabla.

$$P(z \leq 1.0) = 0.8413$$

$$P(z \leq -1.0) = P(z \geq 1.0) = 1 - P(z \leq 1.0) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$P(x \leq 4980) = P(z \leq -1.0) = 0.1587$$

$P(x \leq 4980) = 0.1587$ **R//**

Entonces, la probabilidad de que la empresa gaste menos de 4980 litros de pesticida en un mes es de 0.1587

d) Se pide calcular que el consumo de pesticida en el mes este entre 4 990 y 5020 litros, esto es P (4990 ≤ x ≤ 5020). Haciendo las transformaciones para la Distribución Normal Estándar se tiene:

P (4990≤ x ≤ 5020) = $P\left(\frac{4990 - 5000}{20} \leq z \leq \frac{5020 - 5000}{20}\right) = P(-0.5 \leq z \leq 1.0)$

Para hallar $P(-0.5 \leq z \leq 1.0)$ utilizando las Tablas se plantea:

$$P(-0.5 \leq z \leq 1.0) = P(z \leq 1.0) - P(z \leq -0.5).$$

El primer término de la derecha de la ecuación anterior puede encontrarse directamente en la Tabla y ya fue calculado en el inciso anterior, esto es

$$P(z \leq 1.0) = 0.8413 .$$

Para el segundo término hay que aplicar las propiedades de simetría de la Distribución Normal y del complemento, entonces:

$$P(z \leq -0.5) = P(z \geq 0.5) = 1 - P(z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

Entonces, sustituyendo:

$$P(-0.5 \leq z \leq 1.0) = P(z \leq 1.0) - P(z \leq -0.5) = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$$

$P(4990 \le x \le 5020) = P(-0.5 \le z \le 1.0) = 0.5328$

$P(4990 \le x \le 5020) = 0.5328$ **R//**

O sea, la probabilidad de que el consumo de pesticida en el mes este entre 4 990 y 5020 litros, es de 0.5328 lo que puede interpretarse que un poco más del 50% de los meses el consumo estará en ese intervalo.

e) El valor de x cuya probabilidad de que sea mayor es de 0.02, es equivalente al valor de x cuya probabilidad sea menor de 0.98, por lo que están pidiendo calcular el percentil 98 para esta distribución, o sea $x_{0.98}$.

Buscando en el cuerpo de la Tabla de z el valor de probabilidad más cercano a 0.98, se encuentra que es 0.97982 el que está asociado a un z= 2.05.

Para encontrar el valor de x aplicamos:

$x_{0.98} = 5\,000 + 2.05 * 20 = 5\,041.07$ **R//**

A continuación, se resuelve el problema aplicando la función para la Distribución Normal en Excel.

b) Se pide calcular $P(x \geq 5\,030)$. Entonces utilizando la propiedad del complemento en probabilidades, se tiene que:

$P(x \geq 5\,030) = 1 - P(x \leq 5\,030)$.

Y la $P(x \leq 5\,030)$ puede encontrarse directamente utilizando la función de la Distribución Normal en Excel. Esto se muestra en la Figura 66.

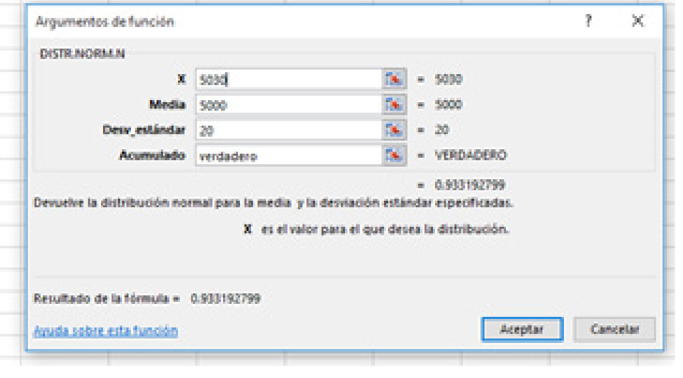


Figura 66. Ventana de la función de la Distribución Normal en Excel para solución inciso b PR 4.10.

Puede verse directamente en la ventana que P(x$\leq$ 5 030) = 0.9332 y entonces:

$$P(x \geq 5030) = 1 - P(x \leq 5030) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

$P(x \geq 5030) = 0.0668$ $P(x \geq 5030) = 0.0668$ **R//**

c) Se pide calcular la probabilidad de que en un mes esa empresa gasté menos de 4980 litros, esto es, P(x$\leq 4980)$.

Este valor de probabilidad puede encontrarse directamente aplicando la función de la Distribución Normal en Excel, lo que se muestra en la Figura 67.

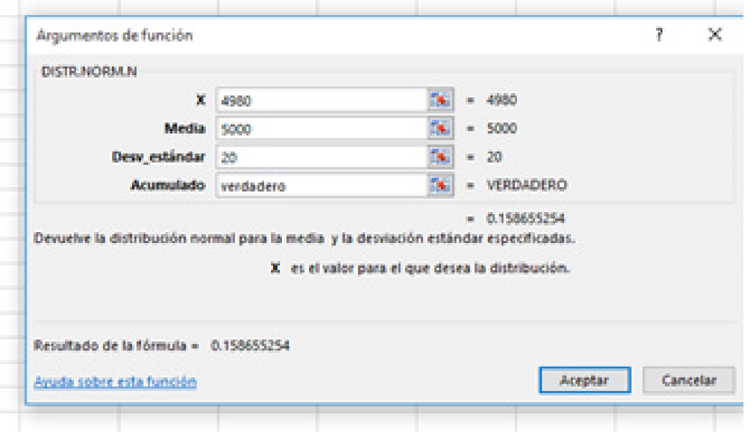


Figura 67. Ventana de la función de la Distribución Normal en Excel para solución inciso c PR 4.10.

Puede verse directamente en la ventana que P(x$\leq 4980) = 0.1587$

P(x$\leq 4980) = 0.1587$ **R//**

d) Se pide calcular que el consumo de combustible en el mes este entre 4 990 y 5020 litros, esto es P (4990 ≤ x ≤ 5020). Haciendo las transformaciones para ponerla en función de sus distribuciones acumuladas, se tiene:

$$P(4990 \leq x \leq 5020) = P(x \leq 5020) - P(x \leq 4990)$$

Los dos términos de la derecha de la igualdad anterior pueden hallarse directamente utilizando la función de la Distribución Normal en Excel. Esto se muestra en la Figura 68.

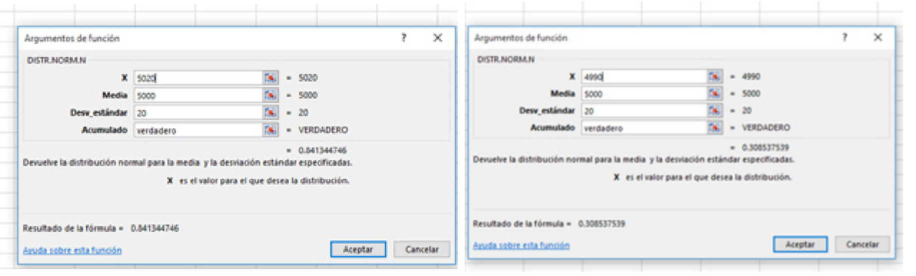


Figura 68. Ventana de la función de la Distribución Normal en Excel para solución inciso d PR 4.10.

Entonces:

$$P(4990 \leq x \leq 5020) = P(x \leq 5020) - P(x \leq 4990) = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$$

$$P(4990 \leq x \leq 5020) = 0.5328$$ **R//**

e) Se pide calcular $x_{0.98}$, para lo que se aplica la función Excel de calcular la inversa de la Distribución Normal, cuya ventana con los datos del problema y el resultado se muestran en la Figura 69.

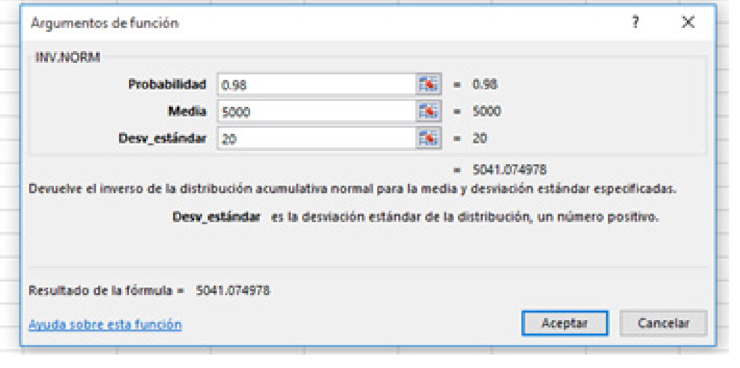


Figura 69. Ventana de la función inversa de la Distribución Normal para inciso e del PR 4.10.

De la ventana puede verse que $x_{0.98}$ = 5041.07 litros.

PR 4.11. El tiempo de producción de un tipo de engranaje, es una variable aleatoria que sigue una Distribución Normal con media de 320 minutos y desviación estándar de 40 minutos. Calcule la probabilidad:

a) Que una solicitud de este tipo de engranaje demore más de 6 horas.

b) Que demore menos de 5.5 horas.

c) Que demore entre 6 horas y 6.5 horas.

d) Que demore entre 5 y 6.5 horas.

SOLUCIÓN

Se define x como el tiempo que demora en producir un engranaje, la cual sigue una Distribución Normal con parámetros de media μ=320 minutos y desviación estándar σ = 40 minutos.

a) Se pide calcular que una solicitud de este tipo de engranaje demore más de 6 horas (360 minutos), esto es, $P(x \geq 360)$.

Estandarizando a la variable normal estandarizada z se tiene:

$$P(x \geq 360) = P\left(z \geq \frac{360 - 320}{40}\right) = P(z \geq 1)$$

Pero el valor de $P(z \geq 1)$ no se encuentra directamente en la Tabla de la Distribución Normal Estándar y hay que aplicar la propiedad del complemento, esto es:

$$P(z \geq 1.0) = 1 - P(z \leq 1.0)$$

Y en la Tabla $P(z \leq 1.0) = 0.8413$ entonces sustituyendo:

$$P(z \geq 1.0) = 1 - P(z \leq 1.0) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Finalmente:

$$P(x \geq 360) = P(z \geq 1.0) = 1 - P(z \leq 1.0) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$P(x \geq 360) = 0.1587$ **R//**

Lo que se interpreta que la probabilidad que un engranaje demore más de 360 minutos es de 0,1587, o también que un 15.87% de las veces que se produzca ese engranaje demorará más de 360 minutos.

b) Se pide calcular la probabilidad que el engranaje demore menos de 5.5 horas (330 minutos), esto es $P(x \leq 330)$. Estandarizando la variable a z, se tiene que:

$$P(x \leq 330) = P\left(z \leq \frac{330 - 320}{40}\right) = P(z \leq 0.25)$$

Este valor puede encontrarse directamente en la Tabla de la Distribución Normal, por tanto:

$$P(z \leq 0.25) = 0.5987$$

Entonces:

$$P(x \leq 330) = P(z \leq 0.25) = 0.5987$$

$P(x \leq 330) = 0.5987$ **R//**

O sea, la probabilidad que elaborar un engranaje sea menor de 330 minutos es de 0.5987.

c) Se pide calcular la probabilidad que el tiempo de fabricación de un engranaje demore entre 6 horas y 6.5 horas, esto es P $(360 \leq x \leq 390)$. Estandarizando a z:

P $(360 \leq x \leq 390) = P\left(\frac{360 - 320}{40} \leq z \leq \frac{390 - 320}{40}\right) = P(1.0 \leq z \leq 1.75)$

Realizando las transformaciones para buscar el valor de $P(1.0 \leq z \leq 1.75)$ en la Tabla, se tiene que:

$$P(1.0 \leq z \leq 1.75) = P(z \leq 1.75) - P(z \leq 1.0)$$

La $P(z \leq 1.0)$ ya fue encontrada anteriormente y es igual a 0.8413, buscando en la Tabla el valor de $P(z \leq 1.75)$ se tiene que:

$$P(z \leq 1.75) = 0.9599$$

Entonces, sustituyendo los valores de z encontrados:

$$P(1.0 \leq z \leq 1.75) = P(z \leq 1.75) - P(z \leq 1.0) = 0.9599 - 0.8413 = 0.1186$$

Y por tanto:

P $(360 \leq x \leq 390) = 0.1186$

O sea, la probabilidad que el tiempo de elaboración de un engranaje este en el intervalo de 360 a 390 minutos es relativamente pequeña e igual a 0.1186.

d) Hay que calcular la probabilidad de que el tiempo de fabricación de un engranaje esté en el intervalo entre 5 horas (300 minutos) y 6 horas (360 minutos), esto es, P (300≤ x ≤ 360).

Estandarizando el valor de x a z, se tiene que:

$$P(300 \leq x \leq 360) = P\left(\frac{300-320}{40} \leq z \leq \frac{360-320}{40}\right) = P(-0.5 \leq z \leq 1.00)$$

Haciendo las transformaciones necesarias para poder utilizar la Tabla de la Distribución Normal Estándar disponible queda:

$$P(-0.5 \leq z \leq 1.00) = P(z \leq 1.00) - P(z \leq -0.5)$$

Aplicando las propiedades de simetría de la Distribución Normal y la del complemento se tiene que:

$$P(z \leq -0.5) = P(z \geq 0.5) = 1 - P(z \leq 0.5)$$

En la Tabla de la Distribución Normal puede encontrarse que:

$$P(z \leq 0.5) = 0.6915$$

$$P(z \leq 1.00) = 0.8413$$

Sustituyendo estos valores:

$$P(-0.5 \leq z \leq 1.00) = P(z \leq 1.00) - P(z \leq -0.5) = 0.8413 - (1 - 0.6915)$$

= 0.5328

Por tanto:

P (300≤ x ≤ 360) = 0.5328 **R//**

O sea, que el 53.28% de las veces que se elabore ese engranaje, su tiempo estará entre 300 y 360 minutos.

Resolviendo este problema utilizando la función de la Distribución Normal en Excel se tiene:

a) Hay que calcular P (x ≥ 360).

Hay que recordar que la función de la Distribución Normal en Excel solo da los valores para la probabilidad acumulada, por lo que en este caso hay que utilizar el complemento para hacer la transformación necesaria, esto es:

P (x ≥ 360) = 1 – P (x ≤360)

El segundo término de la parte derecha puede encontrase directamente de la función Excel para la Distribución Normal. La ventana se muestra en la Figura 70.

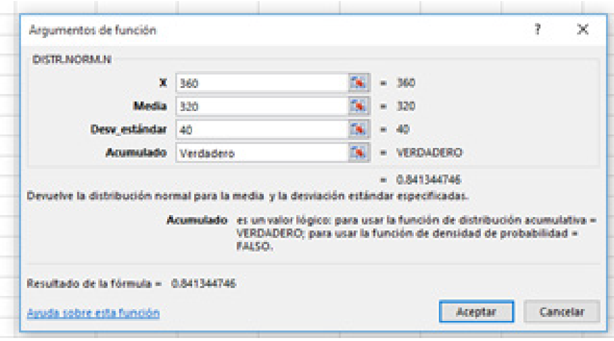


Figura 70. Ventana de la Distribución Normal en Excel para la solución del PR 4.11 inciso a.

En la ventana puede verse que P (x ≤360) = 0.8413 y sustituyendo:

P (x ≥ 360) = 1 – P (x ≤360) = 1 – 0.8413 = 0.1587

P (x ≥ 360) = 0.1587 **R//**

b) Se pide calcular la probabilidad que el engranaje demore menos de 5.5 horas (330 minutos), esto es $P(x \leq 330) P(x \leq 330)$. Este valor puede encontrarse directamente en la función de la Distribución Normal de Excel. La ventana se muestra en la Figura 71.

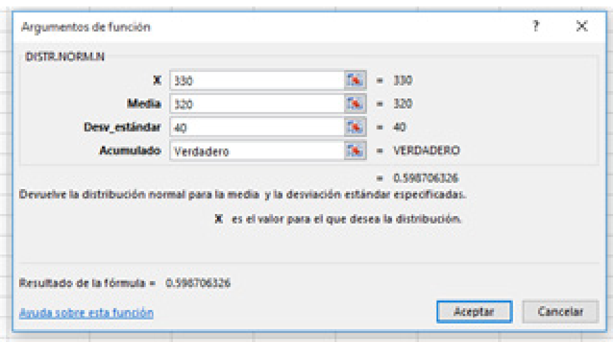


Figura 71. Ventana de la Distribución Normal en Excel para la solución del PR 4.11 inciso b.

Y puede verse que:

$P(x \leq 330) = 0.5987$ **R//**

c) Se pide calcular la probabilidad que el tiempo de fabricación de un engranaje demore entre 6 horas y 6.5 horas, esto es P (360≤ x ≤ 390). Para utilizar la función de la Distribución Normal en Excel es necesario realizar la siguiente transformación:

P (360≤ x ≤ 390) = P (x ≤ 390) - P (x ≤ 360)

En el inciso a se halló que P (x ≤360) = 0.8413. Por tanto, solo queda encontrar el valor de P (x ≤ 390) para dar respuesta al inciso. La ventana para el cálculo de P (x ≤ 390), se muestra en la Figura 72.

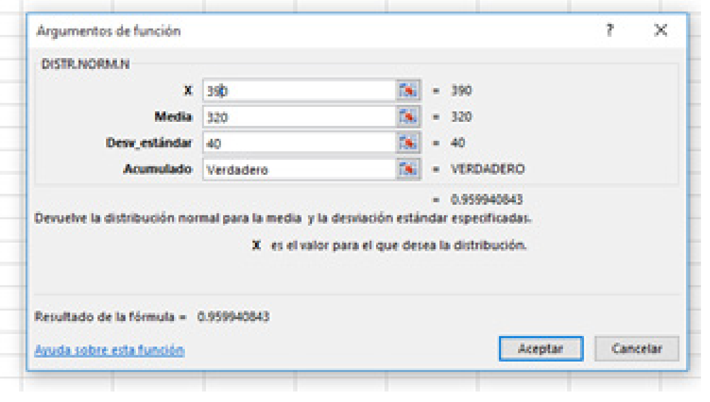


Figura 72. Ventana de la Distribución Normal en Excel para la solución del PR 4.11 inciso c.

Puede verse que (x ≤ 390) = 0.9599 y sustituyendo:

P (360≤ x ≤ 390) = P (x ≤ 390) - P (x ≤ 360) = 0.9599 – 0.8413 = 0.1186

P (360≤ x ≤ 390) = 0.1186 **R//**

d) Hay que calcular P (300≤ x ≤ 360). Transformando:

P (300≤ x ≤ 360) = P (x ≤ 360) - P (x ≤ 300)

Solo quedaría encontrarP (x ≤ 300) y la ventana de la función de la Distribución Normal en Excel se muestra en la Figura 73.

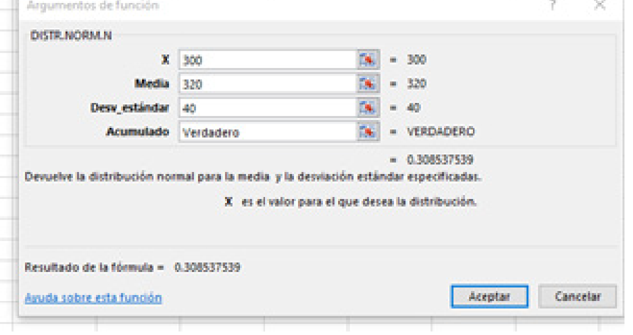


Figura 73. Ventana de la Distribución Normal en Excel para la solución del PR 4.11 inciso d.

Puede verse que$P(x \leq 300) = 0.3085$ y sustituyendo:

$P(300 \leq x \leq 360) = P(x \leq 360) - P(x \leq 300) = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$

$P(300 \leq x \leq 360) = 0.5328$ **R//**

PR 4.12. Se requiere transportar un producto, primero en camión y después en tren. Se conoce que el tiempo de ambos tipos de transportación es aleatoria con Distribución Normal para el caso del camión con media de 4 horas y 20 minutos y desviación típica de 30 minutos y del transporte por ferrocarril con media de 8 horas y desviación típica de 1 hora. Asuma independencia entre el tiempo de viaje en ambos tipos de transportación. Calcule la probabilidad de:

a) Que el viaje en camión demore más de 5 horas.

b) Que el viaje en tren demora menos 10 horas.

c) Que el viaje en tren demore entre 8 y 10 horas.

d) Que el tiempo total del viaje sobrepase las14 horas.

e) Que el tiempo total del viaje esté entre 10 y 12 horas.

SOLUCIÓN

En este problema se trabaja con dos Distribuciones Normales diferentes, una para cada tipo de transporte. Sea C la variable aleatoria del tiempo de viaje en camión y T la del tiempo de viaje en tren. C sigue una Distribución Normal con media μ=260 minutos y desviación típica σ =30 minutos. T tienen una Distribución Normal con media μ=480 minutos y desviación estándar σ =60 minutos.

a) Se pide calcula la probabilidad de que el viaje en camión demore más de 5 horas (300 minutos), esto es, $P(C \geq 300)$.

Estandarizando la variable se tiene que:

$$P(C \geq 300) = P\left(z \geq \frac{300-260}{30}\right) = P(z \geq 1.33)$$

Como el valor de $P(z \geq 1.33)$ no aparece directamente en la Tabla, hay que realizar las transformaciones necesarias. Aplicando el concepto de complemento:

$$P(z \geq 1.33) = 1 - P(z \leq 1.33)$$

Y buscando el último término de la ecuación anterior en la Tabla de la Distribución Normal Estándar, se tiene:

$$P(z \leq 1.33) = 0.9082$$

$$P(z \geq 1.33) = 1 - P(z \leq 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

$$P(C \geq 300) = P(z \geq 1.33) = 0.0918$$

$P(C \geq 300) = 0.0918$ **R//**

Esto es, la probabilidad que el viaje en camión demore más de 300 minutos, es baja y tiene un valor de 0.0918.

b) Se pide calcular la probabilidad de que el viaje en tren demora menos de 10 horas (600 minutos), esto es, $P(T \leq 600)$. Estandarizando la variable T a z se tiene:

$$P(T \leq 600) = P\left(z \leq \frac{600-480}{60}\right) = P(z \leq 2.0)$$

Y el último término se pude encontrar directamente en la Tabla de la Distribución Normal Estándar. Entonces:

$$P(z \leq 2.0) = 0.9772$$

$P(T \leq 600) = P(z \leq 2.0) = 0.9772$

$P(T \leq 600) = 0.9772$ **R//**

Esto es, la probabilidad de que el viaje en tren demore menos de 600 minutos es alta e igual a 0.9772. También puede interpretarse de que la duración del viaje en tren, será un 97.72% de las veces menor de 600 minutos.

c) Se pide calcular la probabilidad que el viaje en tren demore entre 8 y 10 horas, esto es, $P\,(480 \leq T \;\leq 600)$.Estandarizando esta variable a z se tiene:

$$P\,(480 \leq T \;\leq 600) = P\left(\frac{480-480}{60} \leq z \leq \frac{600-480}{60}\right) = P\,(\,0 \leq z \;\leq 2.00)$$

Transformando $P\,(\,0 \leq z \;\leq 2.00)$ para poder utilizar la Tabla de la Distribución Normal Estándar se tiene que:

$$P\,(0 \leq z \;\leq 2.00) = P\,(z \;\leq 2.00) - P\,(\,z \;\leq 0.00)$$

En el inciso anterior se encontró que $P\,(z \;\leq 2.00) = 0.9772$ y por definición se conoce que $P\,(z \;\leq 0.00) = 0.50$. Entonces, sustituyendo esos valores en la ecuación anterior se tiene que:

$$P\,(0 \leq z \;\leq 2.00) = P\,(z \;\leq 2.00) - P\,(z \;\leq 0.00) = 0.9772 - 0.5000 = 0.4772$$

Finalmente:

$$P\,(480 \leq T \;\leq 600) = P\,(0 \leq z \;\leq 2.00) = 0.4772$$

$P\,(480 \leq T \;\leq 600)$=0.4772 **R//**

Esto es, en un 47.72% el tiempo de viaje en tren estará entre 480 minutos y 600 minutos.

Para los incisos d y e, hay que trabajar con la suma de los tiempos de viaje en camión y en tren. Para ello es necesario aplicar una de las propiedades estudiadas de variables con Distribución Normal, que plantea que la combinación lineal de variables aleatorias independientes con Distribución Normal, da como resultado una variable también con Distribución Normal. Esto se aplicó en la solución del Ejemplo 4.8.

Se define entonces una variable aleatoria TT, tiempo total de viaje, que tiene las siguientes características:

TT = C+T

μ(TT) = μ (C+T) = μ(C) + μ(T) = 260 +480 = 740 minutos.

$$\sigma(TT) = \sqrt{\sigma^2(C) + \sigma^2(T)} = \sqrt{30^2 + 60^2} = 67.08\ minutos$$

d) Se pide calcular la probabilidad de que el tiempo total del viaje sobrepase las14 horas (840 minutos), esto es, P(TT ≥ 840). Estandarizando la variable TT a z, se tiene que:

P(TT ≥ 840) = $P\left(z \geq \frac{840-740}{67.08}\right) = P(z \geq 1.49)$

El último término de la expresión anterior no puede encontrarse directamente en las Tablas de la Distribución Normal y hay que realizar las transformaciones necesarias, entonces aplicando el concepto de complemento, se tiene que:

$$P(z \geq 1.49) = 1 - P(z \leq 1.49)$$

Y en la Tabla de la Distribución Normal Estándar, $P(z \leq 1.49) =$ 0.9319

Sustituyendo:

$$P(z \geq 1.49) = 1 - P(z \leq 1.49) = 1 - 0.9319 = 0.0681$$

Por tanto:

P(TT ≥ 840) = $P(z \geq 1.49) = 0.0681$

P(TT ≥ 840) = 0.0681 **R//**

Esto es, la probabilidad de que el tiempo total de viaje exceda los 840 minutos (14 horas) es pequeña e igual a 0.0681.

e) Se pide calcular la probabilidad que el tiempo total del viaje esté entre 10 y 12 horas, esto es llevado a minutos, P($600 \leq$ TT$\leq$ 720). Estandarizando a la variable z se tiene:

$$P(600 \leq TT \leq 720) = P\left(\frac{600-740}{67.08} \leq z \leq \frac{720-740}{67.08}\right) = P(-2.09 \leq z \leq -0.30)$$

Haciendo las transformaciones necesarias para hallar la probabilidad en el intervalo, con el uso de las Tablas de la Distribución Normal Estándar, se tiene que:

$$P(-2.09 \leq z \leq -0.30) = P(z \leq -0.30) - P(z \leq -2.09)$$

Note que ambos términos de la parte derecha de la anterior igualdad están en la parte negativa de la Distribución Normal Estándar, por lo que hay que seguir realizando transformaciones aplicando las propiedades de simetría de la Distribución Normal y la del complemento, se tiene:

$$P(z \leq -0.30) = P(z \geq 0.30) = 1 - P(z \leq 0.30)$$

$$P(z \leq -2.09) = P(z \geq 2.09) = 1 - P(z \leq 2.09)$$

En la Tabla de la Distribución Normal Estándar:

$P(z \leq 0.30) = 0.6179$

$P(z \leq 2.09) = 0.9812$

$P(z \leq -0.30) = P(z \geq 0.30) = 1 - P(z \leq 0.30) = 1 - 0.6179 = 0.3821$

$P(z \leq -2.09) =$

$P(z \geq 2.09) = 1 - P(z \leq 2.09) = 1 - 0.9817 = 0.0183$

$P(-2.08 \leq z \leq -0.30) = P(z \leq -0.30) - P(z \leq -2.08) = 0.3828 - 0.0188$

$P(-2.08 \leq z \leq -0.30) = 0.3638$

Finalmente:

$P(600 \leq TT \leq 720) = P(-2.08 \leq z \leq -0.30) = 0.3633$

$P(600 \leq TT \leq 720) = 0.3638$ **R//**

Esto significa que un 36.38% de los viajes que se realizan durarán un tiempo total que está entre 600 (10 horas) y 720 minutos (12 horas).

Se pasa a resolver los incisos d y e utilizando el Excel.

En el caso del inciso d se pide calcular la probabilidad de que el tiempo total del viaje sobrepase las14 horas (840 minutos), esto es, P(TT ≥ 840) cuando la media es de 740 minutos y la desviación estándar es de 67.08 minutos. La aplicación de la función Excel para el cálculo de probabilidades de la Distribución Normal para este caso se muestra en la Figura 74.

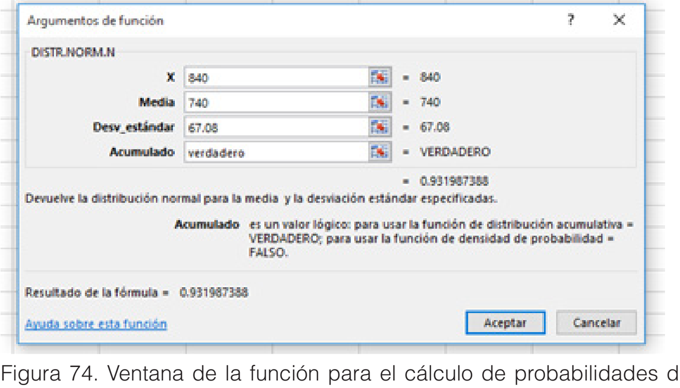


Figura 74. Ventana de la función para el cálculo de probabilidades de la Distribución Normal para inciso d PR 4.12.

En la ventana aparece directamente el valor de P(TT $\leq$ 840) = 0.9320, por lo que aplicando la propiedad del complemento:

P(TT $\geq$ 840) = 1 - P(TT $\leq$ 840) = 1 - 0.9320 = 0.068

P(TT $\geq$ 840) = 0.068 **R//**

En el inciso e, se pide calcular la probabilidad que el tiempo total del viaje esté entre 10 y 12 horas, esto es llevado a minutos es la P($600 \leq TT \leq 720$). Como la función Excel da solamente la probabilidad acumulada, hay que realizar las trasformaciones necesarias para resolver la probabilidad solicitada, entonces:

$$P\,(600 \leq TT \leq 720) = P\,(TT \leq 720) - P\,(TT \leq 600)$$

Se procede a calcular los dos términos de la derecha de la ecuación utilizando el Excel, lo que se muestra en la Figura 75.

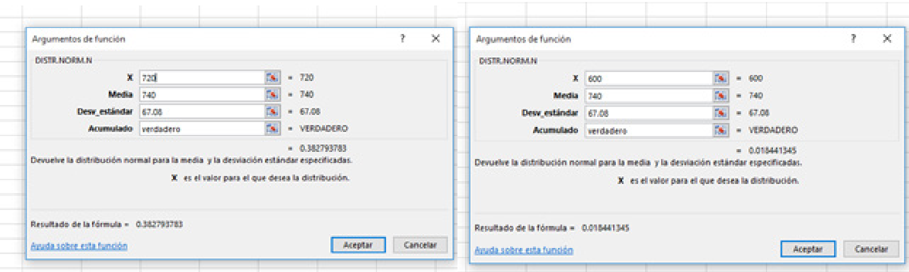


Figura 75. Ventana de la función para cálculo de probabilidad de la Distribución Normal para inciso e PR 4.12.

De las ventanas puede observarse que:

$$P\,(TT \leq 720) = 0.3828 \text{ y } P\,(TT \leq 600) = 0.0184$$

Entonces:

$$P\,(600 \leq TT \leq 720) = P\,(TT \leq 720) - P\,(TT \leq 600) = 0.3828 - 0.0184$$

$$P\,(600 \leq TT \leq 720) = 0.3644$$ R//

4.2.7. Procedimientos gráficos para detectar si los datos siguen una distribución normal

Antes de finalizar este capítulo cabe destacar la importancia que tiene la Distribución Normal en la Estadística, ya que es la que más se presenta en los distintos estudios estadísticos que se realizan. En la parte de Inferencia Estadística, muchas de las técnicas que se describirán tienen como premisa que los datos siguen una Distribución Normal.

Aunque en los próximos capítulos se abordarán las denominadas Pruebas de Bondad de Ajuste que nos permite evaluar si los datos para el análisis que deseamos realizar siguen o no una Distribución Normal, se han desarrollado un número de pruebas que desde los estudios exploratorios nos permiten conocer a priori el cumplimiento o no de esta premisa.

A continuación, se describen algunos de ellos:

HISTOGRAMA DE FRECUENCIA.

El Histograma de Frecuencia Relativa, donde se representa la frecuencia para cada valor o intervalo en porciento o tanto por uno y que fue estudiada en Estadística Descriptiva, es una de las representaciones gráficas que puede ayudar a visualizar si los datos siguen o no una Distribución Normal. El perfil de este histograma debe parecerse a la forma acampanada que tiene la Distribución Normal y debe apreciarse si hay presencia de simetría con relación al valor medio o a la mediana. Muchos Paquetes Estadísticos brindan la posibilidad de que al construir el Histograma se le ajuste una curva con Distribución Normal y eso ayuda a tener más elementos para afirmar la presencia de normalidad en los datos

Ejemplo 4.9. En una granja porcina se está probando con una nueva dieta para la ceba de los cerdos y se ha tomado una muestra de 20 cerdos al concluir dos meses de ceba y el peso en kg se muestra en la siguiente tabla:

No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
PESO	21	25	24	23	26	19	17	21	22	25
No.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
PESO	20	21	22	21	22	19	23	20	18	24

El Histograma de Frecuencia Relativa para estos datos se muestra en la Figura 76.

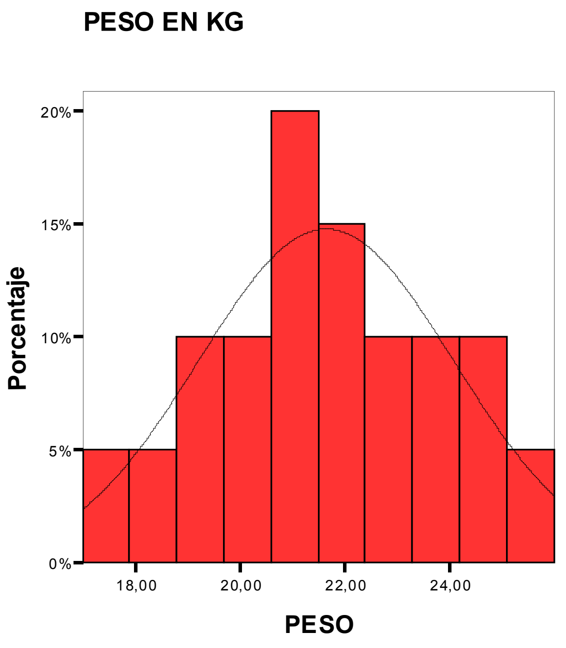


Figura 76. Histograma relativo al peso de los cerdos.

La media aritmética para esta muestra es de 21.65 kg y su desviación típica es de 2.4338.

Puede observarse que la curva de la Distribución Normal se asemeja bastante al Histograma y que este último tiene aproximadamente una figura de campana y simetría con relación al valor de la media aritmética de 21.65, por lo que podemos aceptar a priori que siguen una Distribución Normal

USO DE LOS DIAGRAMAS P - P.

Entre los usos que tiene estos tipos de gráficos está la comparación de una muestra de datos contra una Distribución de Probabilidad conocida. Los Paquetes Estadísticos permiten comparar contra un gran número de las distribuciones existentes y más utilizadas en la práctica.

El Diagrama P-P, es un gráfico en que en el primer cuadrante de un sistema de ejes cartesianos se representa en la abscisa (X) la frecuencia acumulada relativa de los datos de una muestra y en la ordenada (Y) se representa la frecuencia acumulada de una Distribución Teórica, tomando como parámetros (media, desviación típica u otros) los estimados a partir de la muestra. Debe esperarse que si ambas distribuciones, la muestral y la teórica son similares, los puntos de cada par deben quedar sobre la línea de 45 grados que divide el primer cuadrante.

Se ejemplifica la construcción del Diagrama P-P para el ejemplo del peso de los cerdos desarrollado anteriormente. Primeramente, se ordena en orden ascendente los datos que aparecen en la tabla de datos.

En la siguiente tabla se muestra los valores de la variable, la frecuencia absoluta y relativa acumulada para cada valor, siendo esta última los valores del eje X del Gráfico P-P.

VALOR	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
FREC ABS	1	1	2	2	4	3	2	2	2	1
FREC REL ACUM	0.05	o.10	0.20	0.30	0.50	0.65	0.75	0.85	0.95	1.00

Para calcular la frecuencia relativa acumulada para cada variable si se asume que sigue una Distribución Normal, habría que estandarizar cada valor de la variable (Z), tomando como media, la media aritmética de la muestra (21.65) y como desviación estándar la estimada para la muestra (2.4338) y hallar la probabilidad acumulada para cada valor de Z. Por ejemplo, para X= 23:

$Z= (23 -21.65) / 2.4338 = 0.5547$

La probabilidad acumulada en una Distribución Normal Estándar para este valor de Z es de 0.71. En la siguiente tabla se muestra los valores de probabilidad acumulada de la Distribución Normal para este ejemplo:

VALOR	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
PROBAB ACUM	0.03	0.07	0.14	0.25	0.39	0.56	0.71	0.83	0.92	0.96

Este sería el valor que se colocaría en el eje Y.

El Gráfico P-P obtenido se muestra en la Figura 77:

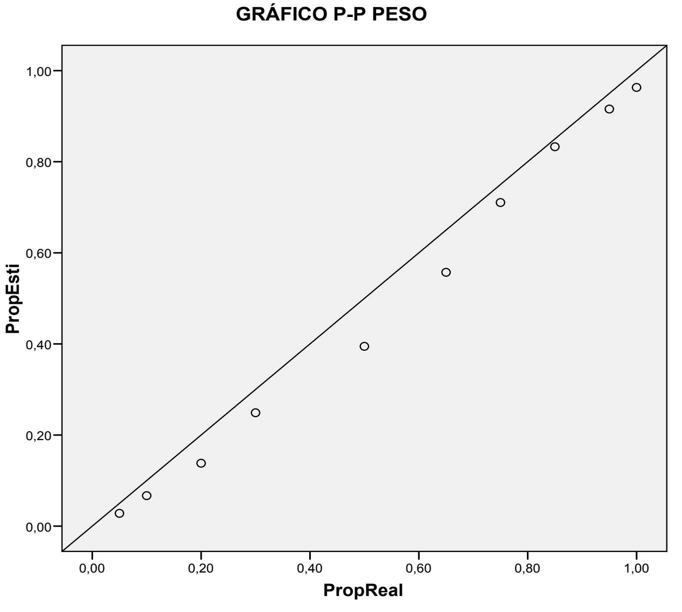


Figura 77. Diagrama P-P para los datos del peso de los cerdos.

Como puede observarse los puntos están bastante agrupados alrededor de la recta Y = X y se puede concluir a priori que los datos de la muestra se aproximan a una Distribución Normal.

Este tipo de gráficos está disponible para los estudios descriptivos en la mayoría de los Paquetes Estadísticos disponibles, junto con otro denominado Q-Q que utiliza solamente los Cuartiles para realizar el análisis.

4.2.8. Problemas propuestos de distribuciones continuas

En todos los problemas propuestos de la Distribución Normal, resolverlos utilizando las Tablas de la Distribución Normal Estándar y las funciones Excel

PP 4.16. El tiempo que demora la recogida de desperdicios sólidos en un sector de una ciudad es aleatorio y sigue una Distribución Uniforme entre 6 y 10 horas. Determine la probabilidad que:

a) El tiempo de recogida demore menos de 8 horas.

b) El tiempo de recogida demore más de 9 horas.

c) El tiempo de recogida demore esté entre 7 y 8 horas.

d) El tiempo de recogida demore entre 4 y 8 horas.

PP 4.17. La producción de hortaliza en una finca agroecológica en un mes, sigue una Distribución Uniforme entre 10 y 15 toneladas. Calcule la probabilidad de que la producción del próximo mes de esa finca sea:

a) Mayor de 14 toneladas.

b) Menor de 12 toneladas.

c) Entre 12 y 14 toneladas.

d) Entre 14 y 16 toneladas.

PP 4.18. En un hotel se recupera cada día, una cantidad de agua de la utilizada con destino al regadío de sus jardines. Esta cantidad de agua recuperada sigue una Distribución Uniforme entre 1600 y 2 400 L. Si el regadío de los jardines necesita de 1800 L de agua diariamente, calcule la probabilidad:

a) Que pueda cubrirse esa necesidad con el agua recuperada.

b) Que haya que usar agua potable para el regadío.

PP 4.19. El consumo de petróleo crudo en una empresa generadora de electricidad cada día, es aleatoria, con Distribución Normal de media 20 toneladas y desviación estándar de 4 ton. Determine la probabilidad que en un día:

a) La empresa consuma menos de 16 toneladas.

b) Que consuma más de 24 toneladas.

c) Que consuma entre 16 y 18 toneladas.

d) Que consuma entre 19 y 23 toneladas.

e) ¿Qué cantidad de petróleo tiene que tener disponible la empresa para que haya una probabilidad de 0,98 que le alcance para un día?

PP 4.20. El tiempo que demora confeccionar un proyecto local para garantizar el agua potable de un poblado, es aleatorio y sigue una Distribución Normal con media de 80 días y desviación estándar de 5 días. Calcule la probabilidad que el proyecto concluya:

a) En menos de 60 días.

b) En más de 80 días.

c) En más de 100 días.

d) Entre 70 y 90 días.

e) Entre 90 y 100 días.

f) ¿Qué cantidad de días como máximo garantiza una probabilidad de 0,90 de concluir el proyecto?

PP 4.21. La cantidad de desechos sólidos procesados en una planta de clasificación y recuperación cada mes, es una variable aleatoria que sigue una Distribución Normal con media de 24 toneladas y desviación estándar de 4 toneladas. Calcule la probabilidad que:

a) La planta procese más de 30 toneladas en un mes.

b) Que procese menos de 20 toneladas.

c) Que procese entre 26 y 28 toneladas.

d) Que procese entre 16 y 18 toneladas.

e) Que procese entre 18 y 22 toneladas.

PP 4.22. La cantidad de agua que se procesa en una potabilizadora por día, es una variable aleatoria con media de 50 000 L y desviación estándar de 2 000 L. Si se requiere que la planta entregue diariamente una cantidad para el consumo de una población, determine la probabilidad que la entrega sea:

a) Sea mayor de 40 000 L.

b) Sea mayor de 50 000 L.

c) Sea mayor que 60 000 L.

d) Que esté entre 45 000 y 60 000 L.

e) Por debajo de 40 000 L.

PP 4.23. En una parcela de árboles maderables, la altura que alcanza los árboles, según muestreo realizado en la misma, es aleatorio con una Distribución Normal que tiene media de 250 cm y desviación estándar de 25 cm. Calcule la probabilidad de que un árbol en esa parcela:

a) Tenga menos de 200 cm.

b) Tenga más de 300 cm.

c) Esté entre 220 y 250 cm.

d) Si un árbol debe talarse si está entre 240 y 260 cm, que porciento de árboles se pueden talar en esta parcela.

PP 4.24. El consumo de energía eléctrica en una pequeña empresa, en un mes, es aleatoria y sigue una Distribución Normal con media de 24 megawatt (MW) y desviación estándar se 3 megawatt. Se quiere calcular la probabilidad que en el próximo mes:

a) Consuma más de 30 MW.

b) Consuma menos de 26 MW.

c) Consuma entre 21 y 32 MW.

d) Consuma más de 22 MW.

PP 4.25. Un vendedor de semillas de maíz de alto rendimiento, explica que la producción media por hectárea es de 9 toneladas y se puede asumir que sigue una Distribución Normal con desviación estándar de 1 tonelada. Un potencial comprador sesea estimar la probabilidad de que el rendimiento por hectárea sea:

a) Mayor de 8.5 toneladas.

b) Mayor de 10 toneladas.

c) Menor de 7 toneladas.

d) El comprador está dispuesto a comprar la semilla si hay una probabilidad mayor del 0.90 que el rendimiento este entre 8.5 y 10 toneladas. ¿compraría las semillas?

PP 4.26. La cantidad de lluvia en el período seco de un territorio es aleatoria y sigue una Distribución Normal con media de 10 mm y desviación estándar de 2 mm. Si la cantidad de lluvia sobrepasa los 12 mm, no será necesario utilizar los sistemas de regadío en los próximos 3 días; si esta entre 10 y 12 no se utilizará en los próximos 2 días, pero si está por debajo de 8 mm habrá que utilizar el regadío. Cálcale la probabilidad asociada a cada uno de los eventos descritos anteriormente.

PP 4.27. En un poblado se está ejecutando un proyecto para la recolección y tratamiento de las aguas residuales de las viviendas. En el diseño del proyecto se aseguraba que el tiempo de terminación era aleatorio con Distribución Normal de media de 180 días y desviación típica de 10 días. La dirección política de ese poblado desea estimar la probabilidad que:

a) E proyecto culmine en menos de 180 días.

b) El proyecto culmine en menos de 120 días.

c) El proyecto culmine en las de 200 días.

d) El proyecto demore entre 150 y 190 días.

PP 4.28. La rehabilitación de una laguna de oxidación que tiene una industria demora un tiempo que se ha estimado aleatorio con Distribución Normal de media 60 días y desviación estándar de 20 días. La Dirección de la Empresa desea estimar la probabilidad que:

a) La rehabilitación termine en menos 45 días.

b) La rehabilitación termine en no más de 70 días.

c) La rehabilitación termine entre 45 y 60 días.

d) La rehabilitación termine en más de 80 días.

PP 4.29. Los ingresos mensuales de una instalación hotelera es una cantidad aleatoria que sigue una Distribución Normal con media de $500 M y desviación estándar de $28 M. Se quiere estimar para el próximo mes la probabilidad que:

a) El hotel ingrese más de $550 M

b) Ingrese menos de $450 M.

c) Ingrese entre $480 M y $520 M.

d) Incumpla su plan de ingreso que es de $480 M

PP 4.30. Una fábrica de azúcar refino tiene una línea de envases de paquetes de 1 kg. Realmente el peso de cada paquete es aleatorio con una Distribución Normal de media 1 kg (1 000 g) y desviación estándar de 3 gramos. Si el estándar de calidad del peso de un paquete es que debe estar entre 995 y 1005 gramos, cuál es la probabilidad que:

a) Se esté cumpliendo con el estándar de calidad de la fábrica.

b) Se esté quedando por debajo del peso mínimo del estándar de calidad.

c) Se esté sobrepasando el límite máximo del estándar de calidad.

PP 4.31. Por datos históricos se ha podido estimar, que el tiempo que demora un juego de béisbol en las Series del Caribe es aleatorio y sigue una Distribución Normal con media de 2 horas y 50 minutos y desviación estándar de 35 minutos. En base a esta información estime la probabilidad de que un juego en este campeonato:

a) Demore más de 3 horas.

b) Demore menos de 3 horas y 20 minutos.

c) Demore entre 2 horas y media y 3 horas.

d) Demore menos de 2 horas y media.

PP 4.32. En un territorio que es el mercado fundamental de un productor de zapatos de hombre, se ha realizado un estudio de la longitud del pie de los hombres mayores de 16 años y el mismo es aleatorio, siguiendo una Distribución Normal con media de 28 cm y desviación estándar de 1 cm. El productor ha decidido producir zapatos con medidas de 27, 28, 29 y 30 cm y desea conocer:

a) Que proporción de la población tiene el pie mayor de 30 cm.

b) Que proporción tiene el pie por debajo de 27 cm.

c) Con las medidas a producir, que proporción de la población puede cubrir.

PP 4.33. Se está realizando un estudio del tiempo que demora un obrero en ensamblar un componente de varias piezas. De acuerdo a los datos recopilados por observación, el tiempo de ensamblaje es aleatorio y sigue una Distribución Normal con media de 90 minutos y desviación estándar de 15 minutos. Calcule la probabilidad de:

a) Que un obrero demore más de 90 minutos en realizar el ensamblaje.

b) Que demore menos de 75 minutos.

c) Que demore entre 80 y 100 minutos.

d) ¿Qué límite superior de tiempo habría que poner para que un 80% de los obreros cumplieran con la norma de ensamblaje?

PP 4.34. Un proyecto de construcción de un vial tiene 3 etapas: estudio del terreno, movimiento de tierra y construcción del vial. Una empresa constructora ha estimado que los tiempos de estas etapas son aleatorios y se pueden asumir independientes y con Distribución Normal con los siguientes parámetros:

- Estudio del terreno, con media de 60 días y desviación estándar de 10 días.

- Movimiento de tierra, con media de 30 días y desviación estándar de 5 días

- Construcción del vial, con media de 60 días y desviación estándar de 15 días.

El contratista desea que antes de empezar una etapa, haya concluido totalmente la anterior.

Con estas condiciones se desea estimar la probabilidad que:

a) El estudio del terreno demore más de 65 días.

b) El movimiento de tierra demore menos de 25 días.

c) La construcción del vial demore entre 50 y 70 días.

d) la ejecución total de la obra demore menos de 145 días.

e) La ejecución total demore entre 150 y 175 días.

Bibliografía

Anderson, D. K., Sweeney, D. J., & William T.A. (2015). Estadística para Administración y Negocios. México: Cengage.

Durret R. (2019). Probability Theory and examples. London: Cambridge University Press.

Gutiérrez, E., & Vladimirovna, O. (2014). Probabilidades y Estadística. Aplicaciones a la Ingeniería y la Ciencia. México: Patria.

Hernández, L. M., Castillo, A., Bofill, A., & Pons, R. (2005). Probabilidades. La Habana: Félix Varela,

Hines, W. W. (2013). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Administración. México: Continental.

Klenke, A. (2013). Probability Theory. A comprehensive course. Berlin. Springer.

Levine, D. M., Szabath, K. A., & Stephan, D. F. (2016). Bussines Statistics. A First Course. New York: Pearson.

Levine, D.M., Krehbiel, T.C., & Berenson, M. L. (2014). Estadística para Administración. México: Pearson.

Muñoz, A., Vicente, J. A., & Muñoz, A. (2010). Estadística para Administración y Dirección de Empresas. Madrid: Ediciones Académicas.

Newbold, P. (2013). Estadística para Administración y Economía. México: Pearson.

Ostle, B., Turner, K. V., Hicks, C. R., & Mc Eliet, G. W. (1996). Engineering Statistics. The Industrial Experiences. San Francisco: Duxbury Press.

Parzen, E. M. (1970). Modern Probability Theory and its application. La Habana: Revolucionaria.

Spiegel, M.R., Schiller, J., & Srinivasan, R. A. (2013). Probabilidad y Estadística. Schaum Spiegel. Madrid: Mc Graw Hill.

Walpole, R. E., Myers R.H., & Myers, S. L. (1999). Probabilidad y Estadística para Ingenieros. México: Prentice Hall.

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Keying Y. (2012). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. México: Pearson.

Anexos. Tablas Estadísticas

- Tabla-T1: Distribución Binomial
- Tabla-T2: Distribución de Poisson
- Tabla-T3: Distribución Normal Estándar

TABLA-T1: DISTRIBUCIÓN BINOMINAL

Probabilidades de la distribución binomial (n; p)

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n	x	$p = 0,1$	$p = 0,2$	$p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$
2	0	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	1	0,1800	0,3200	0,4200	0,4800	0,5000
	2	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500
3	0	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
	1	0,2430	0,3840	0,4410	0,4320	0,3750
	2	0,0270	0,0960	0,1890	0,2880	0,3750
	3	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250
4	0	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
	1	0,2916	0,4096	0,4116	0,3456	0,2500
	2	0,0486	0,1536	0,2646	0,3456	0,3750
	3	0,0036	0,0256	0,0756	0,1536	0,2500
	4	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625
5	0	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
	1	0,3280	0,4096	0,3602	0,2592	0,1562
	2	0,0729	0,2048	0,3087	0,3456	0,3125
	3	0,0081	0,0512	0,1323	0,2304	0,3125
	4	0,0005	0,0064	0,0284	0,0768	0,1562
	5	0,0000	0,0003	0,0024	0,0102	0,0312
6	0	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156
	1	0,3543	0,3932	0,3025	0,1866	0,0938
	2	0,0984	0,2458	0,3241	0,3110	0,2344
	3	0,0146	0,0819	0,1852	0,2765	0,3125
	4	0,0012	0,0154	0,0595	0,1382	0,2344
	5	0,0001	0,0015	0,0102	0,0369	0,0938
	6	0,0000	0,0001	0,0007	0,0041	0,0156
7	0	0,4783	0,2097	0,0824	0,0280	0,0078
	1	0,3720	0,3670	0,2471	0,1306	0,0547
	2	0,1240	0,2753	0,3176	0,2613	0,1641
	3	0,0230	0,1147	0,2269	0,2903	0,2734
	4	0,0026	0,0287	0,0972	0,1935	0,2734
	5	0,0002	0,0043	0,0250	0,0774	0,1641
	6	0,0000	0,0004	0,0036	0,0172	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0078

TABLA-T1 (Continuación)

Probabilidades de la distribución binomial $(n; p)$

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

n	x	$p = 0,1$	$p = 0,2$	$p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$
8	0	0,4305	0,1678	0,0576	0,0168	0,0039
	1	0,3826	0,3355	0,1977	0,0896	0,0312
	2	0,1488	0,2936	0,2965	0,2090	0,1094
	3	0,0331	0,1468	0,2541	0,2787	0,2188
	4	0,0046	0,0459	0,1361	0,2322	0,2734
	5	0,0004	0,0092	0,0467	0,1239	0,2188
	6	0,0000	0,0011	0,0100	0,0413	0,1094
	7	0,0000	0,0001	0,0012	0,0079	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0039
9	0	0,3874	0,1342	0,0404	0,0101	0,0020
	1	0,3874	0,3020	0,1556	0,0605	0,0176
	2	0,1722	0,3020	0,2668	0,1612	0,0703
	3	0,0446	0,1762	0,2668	0,2508	0,1641
	4	0,0074	0,0661	0,1715	0,2508	0,2461
	5	0,0008	0,0165	0,0735	0,1672	0,2461
	6	0,0001	0,0028	0,0210	0,0743	0,1641
	7	0,0000	0,0003	0,0039	0,0212	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0004	0,0035	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020
10	0	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010
	1	0,3874	0,2684	0,1211	0,0403	0,0098
	2	0,1937	0,3020	0,2335	0,1209	0,0439
	3	0,0574	0,2013	0,2668	0,2150	0,1172
	4	0,0112	0,0881	0,2001	0,2508	0,2051
	5	0,0015	0,0264	0,1029	0,2007	0,2461
	6	0,0001	0,0055	0,0368	0,1115	0,2051
	7	0,0000	0,0008	0,0090	0,0425	0,1172
	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0106	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010

TABLA-T1 (Continuación)

Probabilidades de la distribución binomial $(n; p)$

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n	x	$p = 0,1$	$p = 0,2$	$p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$
15	0	0,2059	0,0352	0,0047	0,0005	0,0000
	1	0,3432	0,1319	0,0305	0,0047	0,0005
	2	0,2669	0,2309	0,0916	0,0219	0,0032
	3	0,1285	0,2501	0,1700	0,0634	0,0139
	4	0,0428	0,1876	0,2186	0,1268	0,0417
	5	0,0105	0,1032	0,2061	0,1859	0,0916
	6	0,0019	0,0430	0,1472	0,2066	0,1527
	7	0,0003	0,0138	0,0811	0,1771	0,1964
	8	0,0000	0,0035	0,0348	0,1181	0,1964
	9	0,0000	0,0007	0,0116	0,0612	0,1527
	10	0,0000	0,0001	0,0030	0,0245	0,0916
	11	0,0000	0,0000	0,0006	0,0074	0,0417
	12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0139
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0032
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000
	1	0,2701	0,0576	0,0068	0,0005	0,0000
	2	0,2852	0,1369	0,0278	0,0031	0,0002
	3	0,1901	0,2054	0,0716	0,0123	0,0011
	4	0,0898	0,2182	0,1304	0,0350	0,0046
	5	0,0319	0,1746	0,1789	0,0746	0,0148
	6	0,0089	0,1091	0,1916	0,1244	0,0370
	7	0,0020	0,0545	0,1643	0,1659	0,0739
	8	0,0003	0,0222	0,1144	0,1797	0,1201
	9	0,0001	0,0074	0,0654	0,1597	0,1602
	10	0,0000	0,0020	0,0308	0,1171	0,1762
	11	0,0000	0,0005	0,0120	0,0710	0,1602
	12	0,0000	0,0001	0,0039	0,0355	0,1201
	13	0,0000	0,0000	0,0010	0,0146	0,0739
	14	0,0000	0,0000	0,0002	0,0049	0,0370
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0148
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0046
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

TABLA-T2: DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Probabilidades de la distribución Poisson

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

x	$\lambda = 0{,}1$	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$	$\lambda = 0{,}6$	$\lambda = 0{,}7$	$\lambda = 0{,}8$	$\lambda = 0{,}9$	$\lambda = 1{,}0$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6							0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7										0,0001

x	$\lambda = 1{,}1$	$\lambda = 1{,}2$	$\lambda = 1{,}3$	$\lambda = 1{,}4$	$\lambda = 1{,}5$	$\lambda = 1{,}6$	$\lambda = 1{,}7$	$\lambda = 1{,}8$	$\lambda = 1{,}9$	$\lambda = 2{,}0$
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8			0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9							0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

x	$\lambda = 2{,}1$	$\lambda = 2{,}2$	$\lambda = 2{,}3$	$\lambda = 2{,}4$	$\lambda = 2{,}5$	$\lambda = 2{,}6$	$\lambda = 2{,}7$	$\lambda = 2{,}8$	$\lambda = 2{,}9$	$\lambda = 3{,}0$
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12										0,0001

TABLA-T2 (Continuación)

Probabilidades de la distribución Poisson

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

x	$\lambda = 3{,}1$	$\lambda = 3{,}2$	$\lambda = 3{,}3$	$\lambda = 3{,}4$	$\lambda = 3{,}5$	$\lambda = 3{,}6$	$\lambda = 3{,}7$	$\lambda = 3{,}8$	$\lambda = 3{,}9$	$\lambda = 4{,}0$
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1733	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13					0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14										0,0001

x	$\lambda = 4{,}1$	$\lambda = 4{,}2$	$\lambda = 4{,}3$	$\lambda = 4{,}4$	$\lambda = 4{,}5$	$\lambda = 4{,}6$	$\lambda = 4{,}7$	$\lambda = 4{,}8$	$\lambda = 4{,}9$	$\lambda = 5{,}0$
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0281	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15					0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

TABLA-T2 (Continuación)

Probabilidades de la distribución Poisson

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

x	$\lambda = 5{,}5$	$\lambda = 6{,}0$	$\lambda = 6{,}5$	$\lambda = 7{,}0$	$\lambda = 7{,}5$	$\lambda = 8{,}0$	$\lambda = 8{,}5$	$\lambda = 9{,}0$	$\lambda = 9{,}5$	$\lambda = 10{,}0$
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0225	0,0149	0,0098	0,0064	0,0041	0,0027	0,0017	0,0011	0,0007	0,0005
2	0,0618	0,0446	0,0318	0,0223	0,0156	0,0107	0,0074	0,0050	0,0034	0,0023
3	0,1133	0,0892	0,0688	0,0521	0,0389	0,0286	0,0208	0,0150	0,0107	0,0076
4	0,1558	0,1339	0,1118	0,0912	0,0729	0,0573	0,0443	0,0337	0,0254	0,0189
5	0,1714	0,1606	0,1454	0,1277	0,1094	0,0916	0,0752	0,0607	0,0483	0,0378
6	0,1571	0,1606	0,1575	0,1490	0,1367	0,1221	0,1066	0,0911	0,0764	0,0631
7	0,1234	0,1377	0,1462	0,1490	0,1465	0,1396	0,1294	0,1171	0,1037	0,0901
8	0,0849	0,1033	0,1188	0,1304	0,1373	0,1396	0,1375	0,1318	0,1232	0,1126
9	0,0519	0,0688	0,0858	0,1014	0,1144	0,1241	0,1299	0,1318	0,1300	0,1251
10	0,0285	0,0413	0,0558	0,0710	0,0858	0,0993	0,1104	0,1186	0,1235	0,1251
11	0,0143	0,0225	0,0330	0,0452	0,0585	0,0722	0,0853	0,0970	0,1067	0,1137
12	0,0065	0,0113	0,0179	0,0263	0,0366	0,0481	0,0604	0,0728	0,0844	0,0948
13	0,0028	0,0052	0,0089	0,0142	0,0211	0,0296	0,0395	0,0504	0,0617	0,0729
14	0,0011	0,0022	0,0041	0,0071	0,0113	0,0169	0,0240	0,0324	0,0419	0,0521
15	0,0004	0,0009	0,0018	0,0033	0,0057	0,0090	0,0136	0,0194	0,0265	0,0347
16	0,0001	0,0003	0,0007	0,0014	0,0026	0,0045	0,0072	0,0109	0,0157	0,0217
17		0,0001	0,0003	0,0006	0,0012	0,0021	0,0036	0,0058	0,0088	0,0128
18			0,0001	0,0002	0,0005	0,0009	0,0017	0,0029	0,0046	0,0071
19				0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0014	0,0023	0,0037
20					0,0001	0,0002	0,0003	0,0006	0,0011	0,0019
21						0,0001	0,0001	0,0003	0,0005	0,0009
22							0,0001	0,0001	0,0002	0,0004
23									0,0001	0,0002
24										0,0001

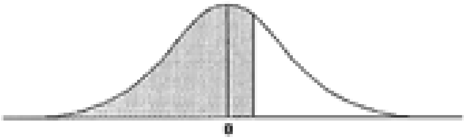
TABLA-T2 (Continuación)

Probabilidades de la distribución Poisson

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

x	$\lambda = 11,0$	$\lambda = 12,0$	$\lambda = 13,0$	$\lambda = 14,0$	$\lambda = 15,0$	$\lambda = 16,0$	$\lambda = 17,0$	$\lambda = 18,0$	$\lambda = 19,0$	$\lambda = 20,0$
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001
6	0,0411	0,0255	0,0152	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002
7	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0019	0,0010	0,0005
8	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013
9	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029
10	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058
11	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106
12	0,1094	0,1144	0,1099	0,0984	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176
13	0,0926	0,1056	0,1099	0,1060	0,0956	0,0814	0,0658	0,0509	0,0378	0,0271
14	0,0728	0,0905	0,1021	0,1060	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387
15	0,0534	0,0724	0,0885	0,0989	0,1024	0,0992	0,0906	0,0786	0,0650	0,0516
16	0,0367	0,0543	0,0719	0,0866	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0772	0,0646
17	0,0237	0,0383	0,0550	0,0713	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760
18	0,0145	0,0255	0,0397	0,0554	0,0706	0,0830	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844
19	0,0084	0,0161	0,0272	0,0409	0,0557	0,0699	0,0814	0,0887	0,0911	0,0888
20	0,0046	0,0097	0,0177	0,0286	0,0418	0,0559	0,0692	0,0798	0,0866	0,0888
21	0,0024	0,0055	0,0109	0,0191	0,0299	0,0426	0,0560	0,0684	0,0783	0,0846
22	0,0012	0,0030	0,0065	0,0121	0,0204	0,0310	0,0433	0,0560	0,0676	0,0769
23	0,0006	0,0016	0,0037	0,0074	0,0133	0,0216	0,0320	0,0438	0,0559	0,0669
24	0,0003	0,0008	0,0020	0,0043	0,0083	0,0144	0,0226	0,0328	0,0442	0,0557
25	0,0001	0,0004	0,0010	0,0024	0,0050	0,0092	0,0154	0,0237	0,0336	0,0446
26		0,0002	0,0005	0,0013	0,0029	0,0057	0,0101	0,0164	0,0246	0,0343
27		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0034	0,0063	0,0109	0,0173	0,0254
28			0,0001	0,0003	0,0009	0,0019	0,0038	0,0070	0,0117	0,0181
29			0,0001	0,0002	0,0004	0,0011	0,0023	0,0044	0,0077	0,0125
30				0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0026	0,0049	0,0083
31					0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030	0,0054
32					0,0001	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0034
33						0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020
34							0,0001	0,0002	0,0006	0,0012
35								0,0001	0,0003	0,0007
36								0,0001	0,0002	0,0004
37									0,0001	0,0002
38										0,0001
39										0,0001

TABLA-T3: DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR



$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t/2}\ dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Índice

Laplace en su obra “Teorie analitique des probabilités” (1812) es el primero en hablar del concepto de probabilidad. Con frecuencia se considera a Pascal y Fermat como los iniciadores del Cálculo de Probabilidad. Pascal se interesa por este tema a propósito de cuestiones relativas a los juegos de azar que le propone el Caballero de Moró.

En esta obra se comienza con lo relativo al experimento o fenómeno aleatorio pues derivado de este se pueden obtener el espacio muestral, es decir, todas las posibles formas en que puede aparecer el mismo y de aquí extraer los sucesos aleatorios que son en última instancia a los que se le determina las relaciones existentes entre ellos y a los que se le determina la probabilidad que se desea conocer.

El otro elemento importante tratado en este libro, es el relacionado con las definiciones de probabilidad donde su sustento teórico se encuentra en la teoría de la medida cuyo máximo exponte es Kolmogorov (1933) en su obra traducida al inglés con el título de “Foundations of the theory of probability”. Se recorren las “mal llamadas” definiciones frecuenciales, clásicas y geométrica para llegar a la verdadera definición de probabilidad Axiomática.

Las variables aleatorias están dentro de los temas tratado, por su importancia en el cálculo de las probabilidades, se analizan las variables aleatorias discretas y continuas para establecer aquellas funciones que nos permiten obtener la probabilidad de un suceso aleatorio.

Por último, y no menos importante, se hace un estudio de las distribuciones discretas y continuas de probabilidad. Es una regularidad, en toda la obra, el número importante de ejercicios resueltos y propuestos que en se muestran, así como la utilización del Excel y el SPSS, como herramienta de ayuda al cálculo de las probabilidades.

EDITORIAL UNIVERSO SUR

FUNDACIÓN METROPOLITANA
Fomentando la Educación Superior

ISBN: 978-959-257-565-3
9 789592 575653